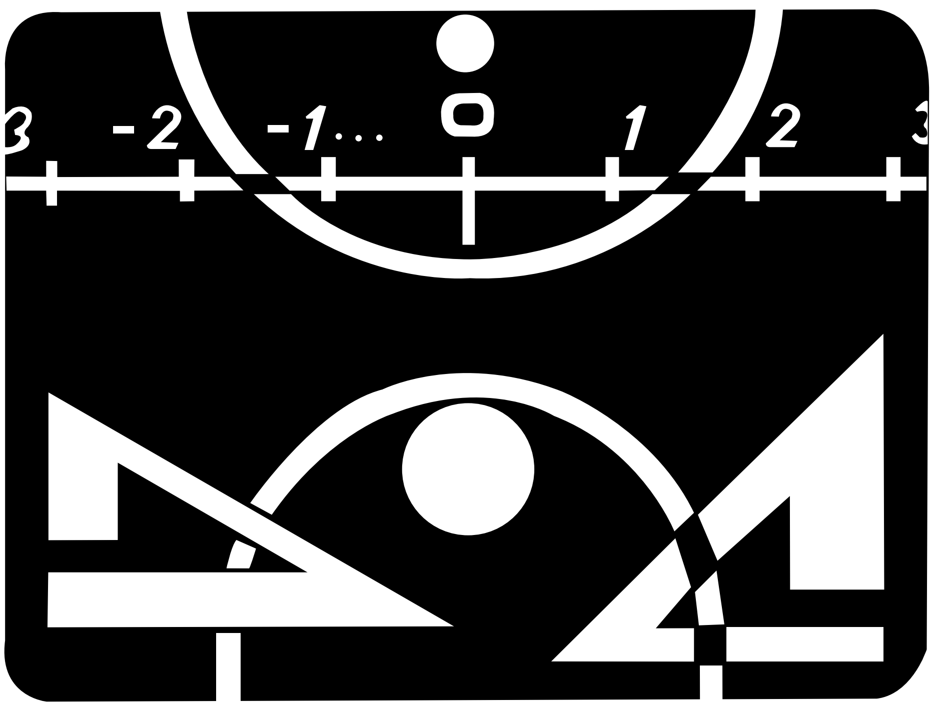
MATEMÁTICAS



PRESENTACIÓN

Al igual que otros trabajos, este libro de *Conceptos Básicos* de tercer grado de matemáticas está dedicado a ti, estimado estudiante. Es nuestro deseo e interés que poseas un material que ayude a tu superación y alcances tus metas y objetivos.

Los temas del programa oficial se dosificaron de tal manera que de ello resultó un grupo de ocho núcleos, los cuales serán tratados en el transcurso del año escolar. Dichos núcleos son los siguientes:

- Horizontes de las matemáticas
- Aritmética
- Álgebra
- Ecuaciones
- Paralelogramos, triángulos y círculo
- Semejanza
- Trigonometría
- Presentación y tratamiento de la información y probabilidad

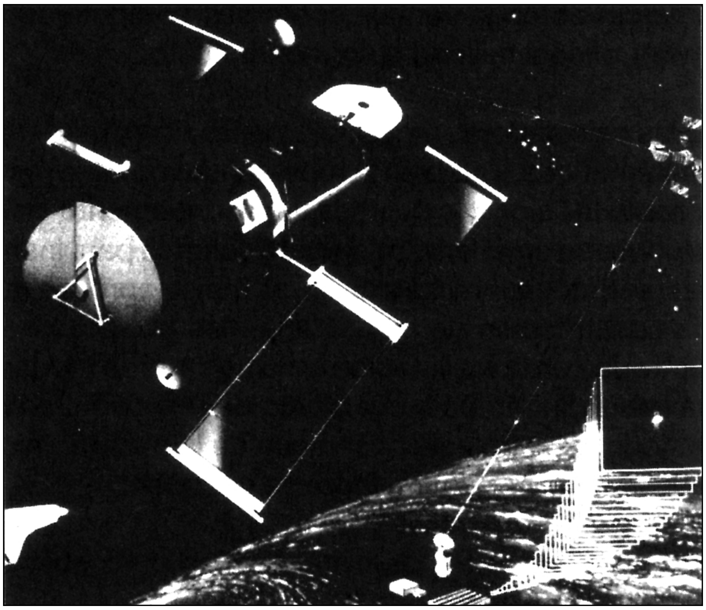
En este curso partimos de concebir que posees un rico acervo cultural adquirido durante los años anteriores, de ahí que tengas capacidad para elegir entre varios caminos y procedimientos. Te mostramos, de manera sencilla y práctica, una serie de conocimientos matemáticos para que los aprendas y apliques en muchas situaciones de la vida cotidiana.

Finalmente, deseamos y esperamos que esta obra te sea de gran utilidad.

Los autores

Capítulo 1

HORIZONTES DE LAS MATEMÁTICAS



Los adelantos científicos y tecnológicos son cada vez más rápidos; lo que ayer era imposible hoy es una realidad, lo que ahora es un sueño, en el futuro quizá será algo cotidiano.

En este capítulo se pretende dar una visión actual y a futuro de las matemáticas en los avances del mundo, así como no perder de vista que son la base de estudios superiores que tendrán mejores logros si se acompañan de una metodología adecuada.

A lo largo de esta etapa se adquieren conocimientos sistemáticos que, posteriormente, contribuirán al desarrollo de una preparación académica y, junto con el conocimiento de otras materias, ampliarán la comprensión de la realidad social y cultural en que se vive.

LA MATEMÁTICA EN EL FUTURO

Corresponde a la sesión de GA 1.1 ¿HASTA DÓNDE SE PUEDE LLEGAR?

La matemática ha sido fundamental en el desarrollo de la humanidad y se considera que seguirá siendo la base de muchos adelantos posteriores.

La matemática ha permitido, entre otras cosas y hasta este momento, que una industria o comercio obtenga ventaja sobre sus competidores al ofrecer un producto de mejor o igual calidad a un menor costo.

La creación de las calculadoras y después de las computadoras está basada en principios matemáticos. También la representación de leyes y principios de otras ciencias como la física y la química tiene fundamento en la matemática. Asimismo, está inmersa en el lanzamiento de cohetes para inspeccionar otros mundos; en las estrategias militares; en el mejor aprovechamiento de los espacios; en la construcción de maquinaria más evolucionada que permita elevar la productividad en la explotación de la tierra; en la reducción del tiempo empleado para realizar un trabajo por medio de una computadora... en fin, la ciencia y sobre todo la tecnología hacen uso de la matemática para alcanzar los niveles de desarrollo que hasta ahora se conocen.

He aquí la importancia que ha tenido la matemática pero, ¿hasta dónde puede llegar?

En el caso de la matemática abstracta, es decir, de la matemática que no tiene aplicaciones inmediatas, sería difícil señalar un uso concreto, pues depende del tema elegido y de la orientación que el matemático le dé.

Con respecto a la matemática aplicada, su avance estará sujeto a las necesidades e impulso de quienes la emplean como instrumento al servicio de sus actividades; basta con ver los adelantos en la elaboración de prótesis; en la creación de programas computacionales que detectan, controlan y curan imperfecciones o enfermedades; en la construcción de naves espaciales y en los proyectos para construir ciudades fuera del planeta; en las grandes investigaciones que se realizan con el fin de encontrar vacunas o antídotos para curar enfermedades que siguen azotando a la humanidad, o muchas actividades más, para imaginar hasta dónde se puede llegar con la matemática.

CONTENIDO DEL PROGRAMA DE TERCERO

Corresponde a la sesión de GA 1.2 LISTOS PARA EL GRAN FINAL

Los temas que contiene el programa de Matemáticas están estructurados de manera que permiten correlaciones, tanto entre ellos como con los de otras asignaturas.

Además, propicia la vinculación de los conocimientos adquiridos en la educación básica con los que se verán en grados superiores de estudios.

Para ello, en este curso se completa el estudio de la **aritmética** con el procedimiento para extraer raíz cuadrada y se inicia en el concepto de **error** con una breve presentación de las fuentes que lo originan.

En **álgebra** se profundiza en las operaciones con polinomios y con fracciones algebraicas; en la solución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones lineales con dos y con tres incógnitas; asimismo, se tratan temas como los productos notables y la factorización y la solución de ecuaciones cuadráticas.

En **geometría** se amplía el estudio de las formas geométricas, con base en sus características y propiedades; se ve la aplicación de teoremas para solucionar problemas de cálculo o construcción de figuras. De igual forma se analizan algunas propiedades de los cuerpos geométricos para calcular su área total y su volumen; también se hace un estudio de casos sencillos de cortes en prismas y pirámides.

Como una parte importante de la geometría se inicia el estudio de la **trígonometría** en lo que se refiere a la relación de lados y ángulos en un triángulo rectángulo y su aplicación en la solución de problemas.

En lo relativo a la **presentación y tratamiento de la información,** en este curso se presentan las tasas de variación, así como los índices y sus aplicaciones en casos sencillos.

También se manejan las nociones de censo, encuesta y muestreo como una forma de generalizar resultados obtenidos en una población.

Con respecto a **probabilidad** se enriquece el concepto de frecuencia y se presenta la aplicación de la fórmula clásica en diversas situaciones.

Se recurre al diagrama de árbol para numerar posibles resultados en un experimento aleatorio y a la regla del producto; igualmente, se resuelven problemas de probabilidad a partir de simulaciones.

Para el desarrollo de los temas señalados se estructuraron los textos con base en la metodología propuesta para la materia. Esto es, se recurre a las actividades permanentes: resolución de problemas, estimación de resultados, cálculo mental, uso de la calculadora, uso de los instrumentos de dibujo y manejo del lenguaje simbólico, con el fin de propiciar el desarrollo de tus habilidades matemáticas.

TRIGONOMETRÍA

Corresponde a la sesión de GA 1.3 UNA RELACIÓN TRIANGULAR

La trigonometría es la parte de la matemática que estudia la forma de calcular los elementos de los triángulos; tiene su origen en tiempos muy remotos; los primeros babilonios la utilizaban como herramienta en la navegación, así como para medir tierras o la distancia de los astros que observaban en el cielo.

Es decir, se usaba para calcular todo aquello que no podía medirse con las unidades empleadas normalmente en distancias cortas.

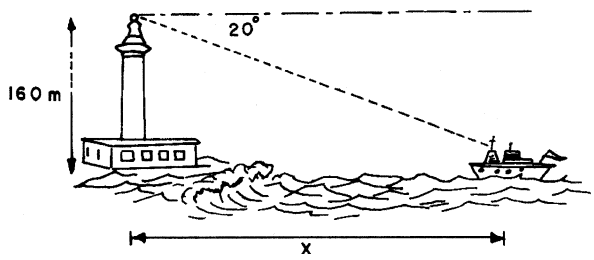
Los árabes adoptaron los conocimientos trigonométricos, los perfeccionaron y después los transmitieron a Europa junto con los conocimientos algebraicos, alrededor del siglo XII.

La trigonometría estudia la relación entre los lados de un triángulo y la medida de sus ángulos internos; sigue usándose en los mismos ámbitos para los que fue creada, es decir, en la astronomía y en la navegación; además, en la topografía, en la mecánica, en el movimiento ondulatorio, en el sonido, etcétera.

Un ejemplo de la aplicación de las funciones trigonométricas se puede ver en la solución de los siguientes problemas:

Desde lo alto de un faro de 160 m de altura se observa un barco a un ángulo de depresión de 20°; calcúlese la distancia que hay del faro al barco.

Se busca la función que relaciona los datos conocidos y el que se desea calcular, en este caso es la tangente.



Por tanto:

$$\tan 20° = \frac{160}{x}$$

Despejando:

$$x = \frac{160}{\tan 20°}$$

Sustituyendo:

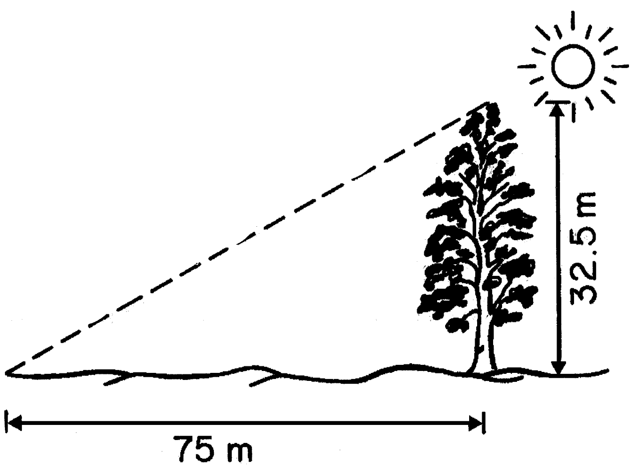
$$x = \frac{160}{0.364}$$

Haciendo operaciones

$$x = 439.56 \text{ m}$$

Así que la distancia del faro al barco es de 439.56 m.

Calcular el ángulo de elevación del Sol en el momento en que un árbol de 32.5 m de altura proyecta una sombra de 75 m.



$$\tan x = \frac{32.5}{75}$$

$$\tan x = 0.4333$$

$$x = 23.4°$$

Por tanto, el ángulo de elevación del Sol en el momento requerido es de 23.4°.

Esta aplicación de la trigonometría, y muchas otras que se verán más adelante, se han usado desde tiempos muy remotos.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Corresponde a la sesión de GA 1.4 NO HAY PROBLEMA

Un aspecto esencial de las matemáticas y sus procedimientos de resolución es que fomentan en el alumno el razonamiento y análisis de situaciones circundantes; es decir, le ayudan a ejercitar procesos mentales haciendo que reflexione y busque la manera de vencer los obstáculos que se presenten, para encontrar los caminos más convenientes que le permitan **resolver problemas.**

La resolución de problemas no se limita a la lectura de enunciados y la búsqueda de respuestas inmediatas. Significa también saber manejar situaciones cotidianas aplicando los conocimientos ya adquiridos y descubriendo nuevas estrategias que indiquen uno o más caminos para tal fin.

Para resolver un problema es conveniente seguir ciertos pasos que conduzcan a su solución:

1. Empezar por analizar el planteamiento del problema.
2. Localizar los datos del problema, examinarlos y buscar puntos de contacto con conocimientos anteriores.
3. Buscar un proceso operacional con el cual se pueda llegar al resultado.
4. Si es posible, hacer un cálculo mental del resultado.
5. Realizar las operaciones necesarias y encontrar el resultado.

Con base en los puntos anteriores, analícese el siguiente problema:

Un grupo de alumnos se reúne todas las tardes durante una semana para pintar la barda de su escuela. El lunes pintan 6.5 m, el martes 5.75 m, el miércoles 7.85 m, el jueves 6.9 m y el viernes 5 m. ¿Cuántos metros de barda pintaron en total?

1. Se lee el problema y se inicia su análisis estableciendo cuál es la pregunta, en este caso: ¿cuántos metros de barda se pintaron en la semana?

2. Se localizan los datos que da el problema:

lunes	6.5	m
martes	5.75	m
miércoles	7.85	m
jueves	6.9	m
viernes	5	m

3. Se busca un proceso operacional; como lo que se quiere encontrar es el total de metros que se pintaron de la barda, se realiza una adición. Utilizando sólo las cifras de los enteros se realiza una **estimación del resultado,** en forma mental o escrita:

$$6 + 5 + 7 + 6 + 5 = 29$$

Este dato se toma sólo como una aproximación del resultado.

4. Si se emplea el **cálculo mental** debe anotarse el resultado.

5. Se realizan en forma escrita las operaciones necesarias.

$$6.7 + 5.75 + 7.85 + 6.9 + 5 = 32.20$$

Este resultado se comprueba con la ayuda de la calculadora.

6. Se establece el resultado, sin olvidar las unidades con las cuales se está trabajando ni la pregunta realizada.

Resultado: pintaron 32.2 m en una semana.

El análisis de problemas y su correcta resolución ayudará a tener un pensamiento más ordenado y a seguir un camino más confiable.

CÓMO ESTUDIAR MATEMÁTICAS

Corresponde a la sesión de GA 1.5 UN CAMINO SEGURO

Cuando ingresa en una escuela, el objetivo principal del estudiante es el aprendizaje de nuevos conceptos, el logro de algunas metas y el cambio de ciertos hábitos y habilidades que le conduzcan a conocimientos cada vez más elevados; todo ello se adquiere con buenos hábitos de estudio, actividades adecuadas y actitudes que faciliten una mayor comprensión del objeto de estudio y permitan profundizar en el tema propuesto.

Algunas actividades que contribuyen a que el estudio se realice de una manera más ordenada y eficaz son:

1. Escuchar con atención. No sólo oír sino entender y cuestionar aquello que se plantea, estableciendo mentalmente modelos que nos ayuden a comprender, valorar y retener lo escuchado.

2. Participar en comentarios grupales en los cuales se discute y aprende a través del intercambio de experiencias.

3. Leer cuidadosamente las fuentes de consulta, advirtiendo las relaciones ahí establecidas con los temas de estudio.

4. Elaborar apuntes donde se encuentren cuadros sinópticos, formularios y esquemas que simplifiquen lo leído y concentren lo esencial.

5. Realizar ejercicios en donde se aplique el concepto visto, consultando, en caso necesario, los libros o apuntes respectivos.

6. Resolver problemas propuestos, identificando primero los datos y, en caso necesario, aplicando las fórmulas correspondientes.

7. Inventar nuevos problemas que impliquen los elementos conocidos y que sean cercanos a la realidad.

Además de esos pasos, es necesario hacer las consideraciones siguientes para estudiar mejor:

1. Contar con un espacio limpio, agradable y bien ventilado en el cual se pueda trabajar.

2. Señalar, en el horario diario de actividades, un tiempo dedicado exclusivamente a la materia (por ejemplo dos días a la semana una hora cada día).

3. Llevar en orden los apuntes y ejercicios elaborados.

4. Visitar una biblioteca de fácil acceso en la cual se puedan encontrar y consultar los libros adecuados.

5. Establecer círculos de estudio con compañeros y amigos con quienes se comenten y discutan temas de la materia.

Los pasos que deben seguirse para el estudio de las matemáticas son flexibles y permiten comprender mejor los conceptos y sus aplicaciones.

LA MATEMÁTICA EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Corresponde a la sesión de GA 1.6 TÚ PUEDES ALCANZARLAS

La elección de una carrera significa una de las decisiones más importantes en la vida. Las opciones actuales para continuar los estudios después de la secundaria son muy diversas y representan variadas alternativas de educación; en todas ellas, la matemática está presente indiscutiblemente.

Las matemáticas se aprenden de manera gradual desde los primeros años de vida, cuando se descubren y establecen las relaciones cuantitativas en la realidad. Después, con los estudios formalizados de una escuela, esas experiencias se amplían, reforzando cada vez más los conocimientos anteriores. Es por eso que los programas de todos los niveles observan entre sí una relación de concordancia y continuidad que propician que en el alumno se desarrolle un razonamiento matemático.

Los programas de matemáticas en el nivel medio superior contienen entre sus materias las siguientes:

- Álgebra
- Trigonometría
- Geometría analítica
- Cálculo diferencial
- Probabilidad y presentación y tratamiento de la información

Para el estudio de estas ramas de las matemáticas es necesario tener una base sólida, la cual sólo puede darse en la medida en que los conocimientos adquiridos en la secundaria hayan sido aprendidos. El álgebra y la geometría son básicas para la comprensión de tales ramas, por lo tanto, debe hacerse énfasis en el estudio de esas materias, ya que son elementales y, si han sido bien aprendidas en la escuela secundaria, constituirán una introducción para el conocimiento de temas más específicos, en donde la abstracción será cada vez mayor y ayudará a adquirir conceptos y a hacer aplicaciones más elevadas.

Las matemáticas del nivel medio son la base para el estudio de cualquier carrera y son fundamentales en todas las actividades humanas; lo mismo las utiliza el ingeniero para hacer cálculos en sus proyectos que un médico para suministrar la cantidad conveniente de anestesia a su paciente; o bien el campesino que compra una cantidad de semilla determinada en relación con el área que va a sembrar, o el pintor que cuida las proporciones de las figuras en el dibujo que realiza, etcétera.

Mientras más claro y profundo sea el conocimiento matemático, mayor será su aplicación en diferentes actividades; y es en el nivel medio superior en donde se estudian sus fundamentos.

PROYECTO PERSONAL

Corresponde a la sesión de GA 1.9 ACEPTO EL RETO

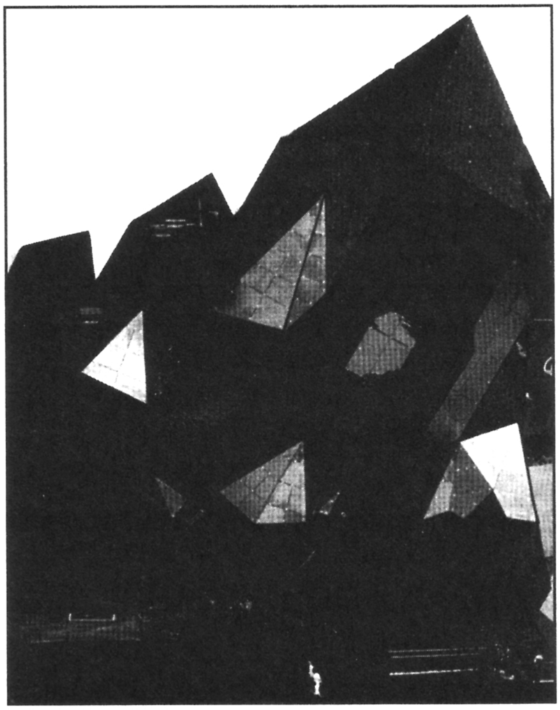
En la mayoría de las actividades humanas, siempre se tienen proyectos, tanto en forma directa como indirecta, en éstos siempre se tienen objetivos que cumplir, para alcanzarlos se deben seguir ciertos planes y estrategias. Asimismo, para alcanzar los objetivos se deben cubrir metas previas en tiempos establecidos; conforme se vayan cubriendo se estará más cerca de los objetivos finales. Por otra parte, para llegar a ellos se deben considerar los imprevistos, por esa razón, si los objetivos se cubren entre 70% y 80% se puede considerar que el proyecto es satisfactorio.

Algunos ejemplos de proyectos son: instalar una fábrica; mejorar un sistema de riego; construir una escuela, un hospital o una unidad habitacional; desarrollar una investigación en diferentes ciencias para proporcionar los descubrimientos al servicio de la sociedad, etcétera.

En lo que respecta al proyecto personal, ya se tiene la experiencia de haber elaborado dos en cursos anteriores; ahora, con base en esa experiencia, si no se consiguieron los objetivos buscados, se deben hacer cambios para mejorar el proyecto, ya que si da resultado en este curso se puede realizar uno cada vez que inicie un nuevo curso. Se debe establecer qué tiempo debe dedicarse, después de clase, a las materias que se consideren con mayor dificultad; también si se hará en forma individual o con otros compañeros; o si se tiene la finalidad de disipar dudas o afirmar conocimientos; todo ello que traerá como consecuencia la asimilación y compresión de otros temas.

Capítulo 2

ARITMÉTICA



La aritmética aparece en la vida del hombre debido a la necesidad de contar.

Con la aparición de instrumentos sofisticados como las calculadoras y computadoras, esta ciencia que da la base para cualquier cálculo, se convierte en algo sencillo y sin gran complicación para todo el mundo.

Sin embargo, el entendimiento claro que se tenga de ella ayuda, indudablemente, a un mayor acceso a otras ramas de las matemáticas como el álgebra y, en general, para cualquier conocimiento por sencillo o abstracto que éste parezca.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

Corresponde a la sesión de GA 2.11 EL DOMINIO COMÚN

Adquirir conocimientos y destreza en las operaciones con fracciones es fundamental para resolver múltiples problemas que se presentan cotidianamente. En esta sesión se mostrarán los diferentes casos de adición y sustracción de fracciones.

Adición

Para la adición de fracciones se presentan dos casos.

Primer caso: adición de fracciones comunes.

Se observa si las fracciones comunes que se sumarán tienen el mismo denominador; si es así, se suman los numeradores y el resultado se le asigna el mismo denominador.

Obsérvese el siguiente problema:

Se tienen tres envases con agua, uno con $\frac{4}{9}\ell$, el segundo con $\frac{3}{9}\ell$ y el último con $\frac{8}{9}\ell$. ¿Qué cantidad de agua hay en total?

La operación para encontrar el resultado será una adición:

$$\frac{4}{9} + \frac{3}{9} + \frac{8}{9}$$

Se puede observar que todas las fracciones tienen igual denominador, por lo que se anota el mismo denominador y se suman los numeradores:

$$\frac{4}{9} + \frac{3}{9} + \frac{8}{9} = \frac{4+3+8}{9} = \frac{15}{9}$$

Con lo que se concluye que hay $\frac{15}{9}\ell$ de agua en los tres envases.

Si la adición que se realizará tiene **fracciones con distinto denominador,** se requiere que se expresen las fracciones de tal manera que los sumandos tengan igual denominador. Esto se logra por medio del **mcm** (mínimo común múltiplo) de los denominadores.

Por ejemplo:

Para realizar la adición de $\frac{5}{6} + \frac{7}{2} + \frac{5}{8} =$

1. Se procede a encontrar un **denominador común**, que es el **mcm** de los denominadores de las fracciones:

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ & 1 & & \end{array}$$

mcm (6, 2, 8) $2^3 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

mcm (6, 2, 8) $= \boxed{24}$

2. Se transforman las fracciones a sus equivalentes para que tengan el mismo denominador.

$$\frac{5}{6} \times \frac{4}{4} = \boxed{\frac{20}{24}} \qquad \frac{7}{2} \times \frac{12}{12} = \boxed{\frac{84}{24}} \qquad \frac{5}{8} \times \frac{3}{3} = \boxed{\frac{15}{24}}$$

3. La adición equivalente a $\frac{5}{6} + \frac{7}{2} + \frac{5}{8} =$ es:

$$\frac{20}{24} + \frac{84}{24} + \frac{15}{24}$$

4. Se realiza la adición:

$$\frac{20}{24} + \frac{84}{24} + \frac{15}{24} = \frac{20 + 84 + 15}{24} = \frac{119}{24}$$

5. La adición resultante es impropia, por lo tanto se obtiene un número mixto.

$$\frac{119}{24} = 4\ \frac{23}{24}$$

Segundo caso: adición de fracciones expresadas con números decimales. Cuando se tiene que obtener la adición de 0.5 y 0.3 y éstos se expresan como fracciones comunes se procede así:

$$0.5 = \frac{5}{10} \text{ y } 0.3 = \frac{3}{10}$$

entonces:

$$\frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5+3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Al sumar en forma directa:

$$\begin{array}{r} 0.5 \\ +\ 0.3 \\ \hline 0.8 \end{array}$$

Desde luego que la adición de fracciones es una operación que se realiza fácilmente. Por tanto, después de haber recordado los dos casos, sería conveniente ejercitar lo aprendido resolviendo un problema donde se ha de sumar una fracción común y una decimal.

Se va a sumar $5\frac{1}{4}$ kg y 2.5 kg de nueces. ¿Cuántos kg de nueces se tienen?

$$5\frac{1}{4} + 2.5 = \boxed{}$$

$$5\frac{1}{4} = \frac{21}{4}$$

$$2.5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{21}{4} + \frac{5}{2} = \frac{21+10}{4} = \frac{31}{4} = 7\frac{3}{4}$$

¡Efectivamente!, con el procedimiento empleado se han obtenido $7\frac{3}{4}$ kg de nueces.

Sustracción

Considérese que al realizar la sustracción de fracciones puede ocurrir lo siguiente:

a) Que el minuendo y el sustraendo sean positivos

b) Que el minuendo sea positivo y el sustraendo negativo

c) Que el minuendo y el sustraendo sean negativos.

Por tanto, al realizar una sustracción se efectúa de manera análoga a la suma utilizando el simétrico del sustraendo, lo cual se generaliza como:

$$\begin{aligned} a - (\ b) &= a + (-b) \\ a - (-b) &= a + b \\ -a - (\ b) &= -a + (-b) \\ -a - (-b) &= -a + b \end{aligned}$$

Y se resuelven utilizando los mismo criterios que en la adición.

Ejemplos:

a) $\frac{8}{5} - (\frac{3}{7})$, se utiliza el simétrico de $\frac{3}{7}$ que es $-\frac{3}{7}$ y el mcm de 5 y 7 es 35, por lo tanto queda como:

$$\frac{8}{5} + -(\frac{3}{7}) = \frac{56 + (-15)}{35} = \frac{41}{35} = 1\ \frac{6}{35}$$

b) $-\ \frac{4}{9}\ -\ (\frac{9}{2})$, se utiliza el simétrico de $\frac{9}{2}$ que es $-\frac{9}{2}$ y el mcm de 9 y 2 es 18 con lo cual queda como:

$$\frac{4}{9} + (-\frac{9}{2}) = \frac{-8 + (-81)}{18} = \frac{-89}{18} = -4\ \frac{17}{18}$$

c) $3\ \frac{2}{5} - (0.15)$ se utiliza el simétrico de 0.15 que es -0.15:

$$3\frac{2}{5} - 0.15 = \boxed{}$$

$$3\frac{2}{5} = \frac{17}{5} \quad y \qquad -0.15 = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

$$\frac{17}{5} + (-\frac{3}{20}) = \frac{68 + (-3)}{20} = \boxed{\frac{65}{20}} = 3\ \frac{5}{20}$$

Las operaciones con fracciones son muy útiles para realizar diversos cálculos que se requieren en el estudio de las matemáticas y otras disciplinas, por lo cual es necesario adquirir habilidad para su realización.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

Corresponde a la sesión de GA 2.12 UN ENTERO RACIONAL

En la resolución de problemas es frecuente encontrar que su solución se obtiene mediante la multiplicación o división de fracciones.

Multiplicación de fracciones

El producto de dos fracciones se calcula fácilmente si se conoce la ley de los signos para la multiplicación:

$$(+)(+) = (+)$$
$$(+)(-) = (-)$$
$$(-)(+) = (-)$$
$$(-)(-) = (+)$$

Multiplicación de números decimales

La distancia de un poblado a otro es de 3.75 km. Si un automovilista ha recorrido 0.25 de su trayecto, ¿cuántos kilómetros ha recorrido?

El algoritmo para obtener el producto con decimales es semejante al de los números enteros:

a) Se aplica la ley de los signos.

$$(-)(-) = (+)$$
$$(+)(+) = (+)$$

Cuando dos factores tienen signo igual, el producto es positivo

$$(-)(+) = (-)$$
$$(+)(-) = (-)$$

Cuando un factor es negativo y otro positivo se tiene un producto negativo

b) Se multiplican los valores absolutos de los factores.

c) La suma total de cifras decimales de todos los factores determina el número de cifras decimales que tendrá el producto.

El problema se resuelve multiplicando la distancia total por la parte recorrida:

3.75	——>	2 cifras decimales
x 0.25	——>	2 cifras decimales
1875		
750		
.2625	——>	4 cifras decimales en total.

Obsérvese los siguientes productos:

−2**.68**	——> 2	cifra (s) decimal (es) 3	<——	− 7**.242**
x	+		+	x
−3**.7**	——> 1	cifra (s) decimal (es) 2	<——	0**.35**
1876				36210
804		cifra (s) decimal (es) 5 en total	<——	21726
+ 2.680 ——> 3				− 2.**53470**

Multiplicación de fracciones comunes

Para observar el mecanismo que se sigue en la multiplicación de fracciones comunes, analícese el siguiente problema:

Una botella con una capacidad de $\frac{1}{2}\ell$ es llenada $\frac{3}{4}$ partes. ¿Qué cantidad de líquido tiene? Para resolver este problema se siguen estos pasos:

a) Se aplica la ley de los signos y se multiplican los valores absolutos de los numeradores y de los denominadores de las fracciones.

b) Para obtener el numerador del producto se multiplican los numeradores entre sí, y para obtener el denominador del producto se multiplican los denominadores entre sí.

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

De donde se concluye que la botella tiene $\frac{3}{8}$ ℓ de líquido.

Obsérvense los siguientes productos:

a) $(-\frac{2}{64})\ (-\frac{1}{3})\ (\frac{2}{5}) = \frac{4}{960}$

b) $(-\frac{7}{3})\ (-\frac{1}{6})\ (-\frac{2}{5})\ (-\frac{1}{4}) = \frac{14}{360}$

c) $(-\frac{2}{6})\ (\frac{1}{3})\ (\frac{2}{5}) = -\frac{4}{90}$

d) $(+\frac{2}{2})\ (-\frac{1}{5})\ (-\frac{4}{3})\ (-\frac{2}{4}) = -\frac{16}{120}$

Nótese que los productos a) y b) son positivos y el número de factores negativos que tienen es par (2 y 4 factores negativos, respectivamente). Los productos c) y d) son negativos y el número de factores negativos es impar (1 y 3, respectivamente).

Cuando existen más de dos factores en una multiplicación se puede observar —al aplicar la ley de los signos— que si el número de factores negativos es **par** (0, 2, 4, 6, 8, etc.) el producto es **positivo,** pero si el número de factores negativos es **impar** (1, 3, 5, 7, 9, etc.) el producto es **negativo.**

<u>División de fracciones</u>

La división es una de las operaciones fundamentales, y es la inversa de la multiplicación. Para su resolución se aplica la ley de los signos para la división:

$(+) \div (+) = (+)$ porque $(+)\ (+) = (+)$
$(+) \div (-) = (-)$ porque $(+)\ (-) = (-)$
$(-) \div (+) = (-)$ porque $(-)\ (+) = (-)$
$(-) \div (-) = (+)$ porque $(-)\ (-) = (+)$

<u>División de números decimales</u>

Analícese el problema siguiente:

Se tiene 25.5 kg de frijol y se repartirán en 15 bolsas. ¿Qué cantidad contendrá cada bolsa?

Este problema se resuelve con la división:

$$25.5 \div 15$$

Al resolver esta división, primero se coloca el punto decimal en el cociente de acuerdo con el primer dígito decimal del dividendo; después se consideran las cantidades positivas, ya que al término de la división se escribirá el signo que le corresponda al cociente, según la ley de los signos.

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 1.7 \\ \hline 15 & 25.5 \\ & 10\ 5 \\ & \ \ 0\ 0 \end{array}$$

El cociente de (25.5) ÷ 15 es positivo al aplicar la ley de los signos.

Obsérvense los ejercicios siguientes:

a) $93 \div 2.5$

Para facilitar el proceso de dividir, el divisor se convierte a entero. Para ello se multiplica el divisor y el dividendo por 10, 100, 1000, etc., según sea el número de decimales del divisor.

Para este caso sólo hay un decimal en el divisor; así pues, se debe multiplicar el divisor y el dividendo por 10.

$93 \div 2.5 = 93(10) \div 2.5\,(10) = 930 \div 25$

Ahora se aplica el algoritmo de la división y se tiene:

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 37.2 \\ \hline 25 & 930 \\ & \ \ 180 \\ & \ \ \ \ 050 \\ & \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Por lo que 37.2 es el cociente de $93 \div 2.5$

b) $0.273 \div 2.61$

Para que el divisor sea un número entero se multiplica éste y el dividendo por 100, porque el divisor tiene hasta centésimos.

0.273 (100) ÷ 2.61 (100) = 27.3 ÷ 261

Nuevamente se aplica el algoritmo de la división:

$$\begin{array}{r|l} & \underline{\;0.104\;} \\ 261 & 27.3 \\ & \;\;1\,200 \\ & \;\;\;\;156 \end{array}$$

0.104 es el cociente de 0.273 ÷ 2.61

División de fracciones comunes

Para resolver este tipo de divisiones se multiplica el dividendo por el recíproco o inverso multiplicativo del divisor. Para esto se efectúa la multiplicación "en cruz": un numerador por un denominador y un denominador por un numerador.

Véase el problema siguiente:

Se tienen 14 envases con medio litro de aceite, esto es $\frac{14}{2}\ell$; si se vacían en envases de $\frac{1}{3}\ \ell$, ¿cuántos envases se llenarán?

Esta operación resuelve el problema anterior:

$$\frac{14}{2} \div \frac{1}{3}$$

Al multiplicar por el recíproco del divisor se tiene que el recíproco o inverso multiplicativo de

$$\frac{1}{3} \quad \text{es} \quad \frac{3}{1}$$

$$\left(\frac{14}{2}\right) \div \left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{14}{2}\right)\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{42}{2}$$

que es igual a multiplicar “en cruz”:

$$\frac{14}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{42}{2} = 21$$

dividendo

divisor

cociente

De donde se concluye que se llenarán 21 envases.

Obsérvese el ejemplo siguiente:

$$\frac{9}{10} \div (-7)$$

El –7 se convierte a fracción común escribiéndole como denominador la unidad.

$$\frac{9}{10} \div \left(-\frac{7}{1}\right) = \frac{9}{-70} = -\frac{9}{70}$$

El cociente de una división de fracciones, igual que en los enteros, indica cuántas veces el divisor “cabe” en el dividendo.

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN DE FRACCIONES

Corresponde a la sesión de GA 2.13 LLEGA A LA RAÍZ

Al elevar un número al cuadrado y extraerle raíz cuadrada, el resultado es el mismo número. Esto sucede porque la potenciación y la radicación son operaciones inversas.

Potenciación

Un problema que se puede resolver con ayuda de la potenciación es el siguiente:

¿Cuál es el total de dulces en una caja que contiene 50 bolsas con 50 dulces cada una?

Este problema se puede solucionar por medio de una multiplicación:

$$50 \times 50 = 2\,500$$

La cual se puede expresar como una potenciación, esto es:

$$50^2 = 2\,500$$

La potenciación es un procedimiento en el cual interviene la multiplicación.

La potencia está formada por la base y por el exponente (o potencia) al cual se elevará la base. La base se toma como factor tantas veces como indique el exponente.

exponente

base $\longrightarrow 4^3$

Esta potencia se lee: “cuatro al cubo o cuatro elevado a la tercera potencia”.

Al descomponer en sus factores la potencia indicada y efectuar la multiplicación se obtiene la potencia de ella.

$$4^3 = \quad (4)\ (4)\ (4) = 64$$

Potencia indicada — Potencia

Obsérvense los siguientes ejemplos:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{625}$

b) $(0.3)^3 = (0.3)\ (0.3)\ (0.3) = 0.027$

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9}$

d) $(-0.25)^3 = (-0.25)(-0.25)(-0.25) = -0.015625$

> La potenciación consiste en tomar la base como factor tantas veces como lo indique el exponente.

A continuación se da una serie de cuadrados de algunos números.

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$30^2 = 900$	$(0.1)^2 = 0.01$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$40^2 = 1\,600$	$(0.2)^2 = 0.04$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$50^2 = 2\,500$	$(0.3)^2 = 0.09$
$4^2 = 16$	$15^2 = 225$	$60^2 = 3\,600$	$(0.4)^2 = 0.16$
$5^2 = 25$	$14^2 = 196$	$70^2 = 4\,900$	$(0.5)^2 = 0.25$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$80^2 = 6\,400$	$(0.6)^2 = 0.36$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$90^2 = 8\,100$	$(0.7)^2 = 0.49$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$100^2 = 10\,000$	$(0.8)^2 = 0.64$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$		$(0.9)^2 = 0.81$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$		

Radicación

La operación inversa de la potencia al cuadrado es la raíz cuadrada.

Obsérvese el siguiente problema:

Un albañil tiene 169 mosaicos para cubrir una superficie de forma cuadrada. ¿Cuántos mosaicos tendrá de lado el cuadrado?

Este problema se resuelve extrayendo raíz cuadrada a 169. Buscando en la tabla de cuadrados se observa que:

$$13^2 = 169$$

Por tanto:

$$\sqrt{169} = 13$$

Así, el lado del cuadrado será de 13 mosaicos.

La raíz cuadrada es la operación inversa a la potenciación al cuadrado, la cual consiste en buscar un número que multiplicado por sí mismo dé el número dado.

El cálculo de la raíz cuadrada puede realizarse por varios métodos, en este caso se hará con ayuda de la tabla de cuadrados.

Ejemplo:

$$\sqrt{6\,400}$$

Se localiza en la tabla el número que elevado al cuadrado dé por resultado ese número. Dicho número es la raíz cuadrada:

$\sqrt{6\,400} \;|\; 80$ como $80^2 = 6\,400$. Pero también $-80^2 = 6\,400$

Se puede concluir que:

$\sqrt{6\,400} \;|\; 80$ y $\sqrt{6\,400} \;|\; -80$

En algunas ocasiones es necesario buscar la raíz cuadrada de fracciones comunes.

Para calcular la raíz cuadrada de una fracción común se calcula la raíz cuadrada del numerador y después la del denominador. Si éstas no son exactas se dejan indicadas.

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$$

Se busca en la tabla de cuadrados qué números elevados al cuadrado dan por resultado 9 y 25:

$$3^2 = 9 \quad y \quad 5^2 = 25$$

Por tanto:

$$\sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}. \quad \text{Asimismo,} \quad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Ejemplo 2:

$$\sqrt{\frac{35}{64}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{64}}$$

Se localizan en la tabla de cuadrados los números que elevados al cuadrado den por resultado 35 y 64. Como en la tabla sólo se localiza:

$$8^2 = 64$$

La solución será:

$$\sqrt{\frac{35}{64}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{35}}{8} \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{35}}{8}$$

dejando indicada $\sqrt{35}$ ya que es una raíz inexacta.

El cálculo de la raíz cuadrada tiene otros métodos de resolución que se estudiarán en sesiones posteriores.

RAÍZ CUADRADA POR TANTEO

Corresponde a la sesión de GA 2.15 ENSAYO Y ERROR

Algunas operaciones matemáticas se han conocido desde la antigüedad. Un ejemplo de ellas es la radicación, misma que el pueblo hindú ya conocía, aunque los árabes la difundieron por el mundo.

La raíz cuadrada es la operación inversa de la potenciación al cuadrado. En esa operación se conoce la potencia y el exponente, pero se busca la base. Consta de los siguientes elementos:

índice → 2
radical → $\sqrt{a}$ = b ← raíz
radicando

Cuando el índice se omite se está indicando que es una raíz cuadrada.

Al calcular las raíces cuadradas de un número, se buscan dos valores con los que, al multiplicarse por sí mismos, se obtenga un producto que sea igual al número dado.

Obsérvese el ejercicio siguiente:

Calcula las raíces cuadradas de 25.

Al buscar un número que multiplicado por sí mismo dé por resultado 25 se tiene que:

1 x 1 = 1, 2 x 2 = 4, 3 x 3 = 9, 4 x 4 = 16, 5 x 5 = 25; por tanto la raíz de 25 es 5:

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{porque} \quad 5 \times 5 = 25$$

Pero existe también otra pareja de números que al multiplicarse dan como producto 25, éstos son:

$$(-5)\,(-5) = 25$$

Ya que al multiplicar dos números negativos el resultado es un número positivo.

Se puede observar que 25 tiene dos raíces: una positiva y una negativa.

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{y} \quad \sqrt{25} = -5$$

Esta situación se presenta para todo número racional positivo, lo cual se representa a continuación:

$\sqrt{a} = b$ donde una de las raíces de **a** es **b** positiva y otra **b** negativa.

$$\sqrt{a} = b \quad \text{y} \quad \sqrt{a} = -b$$

Es posible calcular las raíces de un número observando en la tabla de cuadrados su raíz. Si no es exacta, se podrá estimar al obtener las dos raíces más próximas a él.

Ejemplo: calcula las raíces de 78.

Para hacer el cálculo de esas raíces se utiliza la siguiente tabla:

$1^2 =$	1	$20^2 =$	400
$2^2 =$	4	$30^2 =$	900
$3^2 =$	9	$40^2 =$	1 600
$4^2 =$	16	$50^2 =$	2 500
$5^2 =$	25	$60^2 =$	3 600
$6^2 =$	36	$70^2 =$	4 900
$7^2 =$	49	$80^2 =$	6 400
$8^2 =$	64	$90^2 =$	8 100
$9^2 =$	81	$100^2 =$	10 000
$10^2 =$	100		

Se puede observar que:

$$8^2 = 64 \text{ y } 9^2 = 81$$

Por lo que la raíz de 78 se encuentra entre 8 y 9. Para aproximar a décimos tómese el valor de 8.5

$$8.5 \times 8.5 = 72.25$$

Como al elevar 8.5 al cuadrado el valor resultante es menor que la cantidad original, se toman valores mayores a él que no sean ni iguales ni mayores que 9.

$$8.6^2 = 73.96$$
$$8.7^2 = 75.69$$
$$8.8^2 = 77.44$$
$$8.9^2 = 79.21$$

La raíz que se aproxima más es 8.8; por tanto, resulta que:

$$\sqrt{78} = \pm\ 8.8$$

Si se quiere aproximar a centésimos o milésimos, se continúa con el mismo procedimiento.

Obténganse ahora las raíces de 1 256. Consultando la tabla se pueden observar los valores mayor y menor.

$$30^2 = 900 \quad \text{y} \quad 40^2 = 1\,600$$

Ahora se toman valores intermedios.

$$35^2 = 1\ 225 \quad y \quad 36^2 = 1\ 296$$

Por lo que se puede concluir que las raíces cuadradas aproximadas de 1 256 son:

$$\sqrt{1\ 256} = 35 \quad y \quad \sqrt{1\ 256} = -\ 35$$

Si se desea aproximar a decimales se hace el procedimiento anterior hasta obtener la aproximación deseada.

Para calcular la raíz de una fracción común se buscan las raíces de su numerador y denominador. Las fracciones resultantes serán las raíces.

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} \ ; \quad \sqrt{9} = 3 \qquad y \quad \sqrt{16} = 4$$

Por tanto:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} \qquad y \quad \sqrt{\frac{9}{6}} = -\frac{3}{4}$$

Existen otros métodos con los cuales se puede calcular las raíces cuadradas de un número, pero llevarlo a cabo por tanteo ayuda a desarrollar el cálculo mental, haciendo también más rápida la resolución de problemas.

RAÍZ CUADRADA POR INTERPOLACIÓN

Corresponde a la sesión de GA 2.16 CERCA DE LA SOLUCIÓN

Además del método de tanteo sistemático se pueden calcular las raíces cuadradas de un número por otros métodos; uno de ellos es el de interpolación.

Este método es muy sencillo y consiste en calcular las raíces de un número tomando en cuenta dos valores cercanos, uno mayor y otro menor, y estableciendo de acuerdo a esos datos una proporción.

Obsérvense los siguientes ejemplos:

a) Calcular las raíces cuadradas de 7 508.

Se buscan en la tabla de cuadrados los valores mayor y menor cercanos a ese número.

$$80^2 = 6\,400 \quad 90^2 = 8\,100$$

Se observa que las raíces oscilan entre 80 y 90. Ahora sólo falta encontrar un valor más próximo. Para ello, se restan las bases encontradas y sus potencias.

$$\begin{array}{rcrcr} 90 & - & 80 & = & 10 \\ 8\,100 & - & 6\,400 & = & 1\,700 \end{array}$$

De donde se obtiene la razón:

$$\frac{10}{1\,700}$$

La segunda razón se encuentra restándole la menor potencia encontrada al número del cual se busca la raíz:

$$7\,508 - 6\,400 = 1\,108$$

Este número se anota como consecuente de la segunda razón; el antecedente es el número buscado y se señala con la letra **x** ya que es el valor que se desconoce:

$$\frac{\mathbf{x}}{1\,108}$$

Con esto se puede establecer la proporción:

$$\frac{10}{1\,700} = \frac{\mathbf{x}}{1\,108}$$

Ahora es posible encontrar el valor de **x** aplicando la ley fundamental de las proporciones.

$$\mathbf{x} = \frac{1\,108 \text{ x } 10}{1\,700} = 6.51$$

Por tanto **x** = 6.51; este valor se suma a la base menor.

$$80 + 6.51 = 86.51$$

Por tanto la raíz cuadrada aproximada de 7 508 es 86.51:

$$\sqrt{7\,508} \approx \underline{86.51} \quad y \quad \sqrt{7\,508} \approx -\underline{86.51}$$

El símbolo ≈ o ≐ se lee como aproximadamente.

b) Calcular las raíces cuadradas de 9 700

Se buscan en la tabla de cuadrados los valores mayor y menor cercanos a ese número:

$$90^2 = 8\,100 \quad 100^2 = 10\,000$$

La raíz de 9 700 oscila entre 90 y 100.

Se restan las bases encontradas y sus potencias con lo que se encuentra la primera razón:

$$\begin{array}{rcrcr} 100 & - & 90 & = & 10 \\ 10\,000 & - & 8\,100 & = & 1\,900 \end{array} \qquad \frac{10}{1\,900}$$

Se resta la menor potencia encontrada al número del cual se busca la raíz.

$$9\,700 - 8\,100 = 1\,600$$

Se encuentra la segunda razón:

$$\frac{\mathbf{x}}{1\,600}$$

Con las dos razones se establece la proporción:

$$\frac{10}{1\,900} \qquad \frac{\mathbf{x}}{1\,600}$$

Se aplica la ley fundamental de las proporciones para encontrar el valor desconocido:

$$\mathbf{x} = \frac{1\,600 \times 10}{1\,900}$$

$$x = \frac{16\,000}{1\,900}$$

$$x = 8.42$$

Este valor se suma a la raíz menor:

$$90 + 8.42 = 98.42$$

Y se afirma que:

$$\sqrt{9\,700} \approx \underline{98.42} \quad y \quad \sqrt{9\,700} \approx -\underline{98.42}$$

De esa manera se puede concluir que:

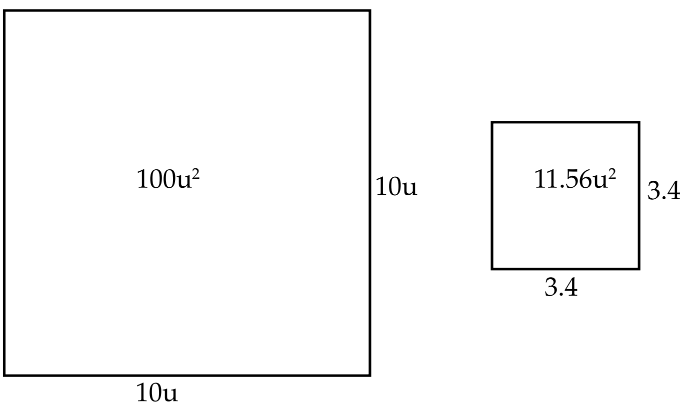
El cálculo de las raíces cuadradas de un número por el método de interpolación muestra una idea aproximada del valor buscado.

RAÍZ CUADRADA POR EL MÉTODO BABILÓNICO

Corresponde a la sesión de GA 2.17 RAÍCES BABILÓNICAS

Es conveniente conocer los diversos métodos para resolver una operación. De esta manera aumentan las posibilidades de tener éxito en su resolución; en esta sesión se presenta un procedimiento más para calcular las raíces cuadradas de un número, **el método babilónico.**

Las expresiones $\sqrt{100}\,\lvert\underline{10}$ y $\sqrt{11.56}\,\lvert\underline{3.4}$ se pueden representar geométricamente mediante cuadrados con áreas de 100 u^2 y 11.56 u^2 cuyos lados miden 10 u y 3.4 u, respectivamente.



$\sqrt{100}\,\lvert\underline{10}$

$\sqrt{11.56}\,\lvert\underline{3.4}$

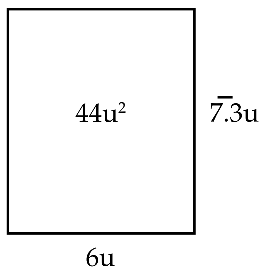
Para calcular la raíz de un número mediante el método babilónico se construye una sucesión de rectángulos cuyas áreas correspondan a la medida a la cual se le va a extraer la raíz cuadrada, siendo los lados más parecidos cada vez entre sí. Por lo tanto, los rectángulos serán cada vez más semejantes a un cuadrado, y la medida de sus lados se aproximará más a la raíz buscada.

Ejemplos:

a) Calcular la raíz cuadrada de 44.

Se elige un valor para la longitud de uno de los lados del primer rectángulo. Este valor debe ser cercano a la raíz de 44 (en este caso 6). Como el área del rectángulo es 44 y su base es 6, su altura será:

$$\frac{44}{6} = 7.\overline{3}\ \text{u}$$



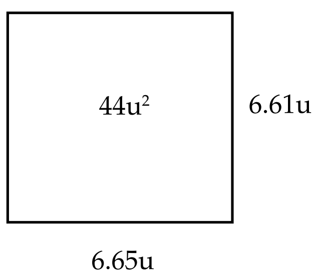
Para obtener un rectángulo de lados más parecidos entre sí se construye otro cuya base sea el promedio de las medidas de la base y la altura del rectángulo anterior.

El promedio de las medidas de la base y la altura del rectángulo anterior es:

$$\frac{6+7.3}{2} = \frac{13.3}{2} = 6.65$$

Este valor (6.65) será la base del nuevo rectángulo. Como el área del rectángulo sigue siendo la misma, entonces la altura es

$$\frac{44}{6.65} = 6.61\ \text{u}$$



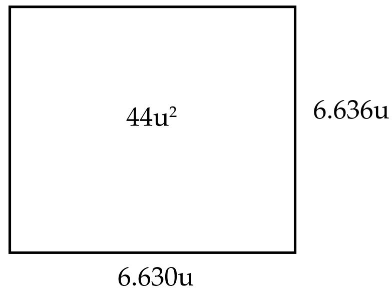
Para la base del siguiente rectángulo, nuevamente se calcula el promedio de la base y la altura del anterior.

$$\frac{6.65+6.61}{2} = 6.630 \text{ u}$$

La base del nuevo rectángulo es 6.63 u.

El área sigue siendo la misma, por lo tanto la altura es:

$$\frac{44}{6.630} = 6.636 \text{ u}$$

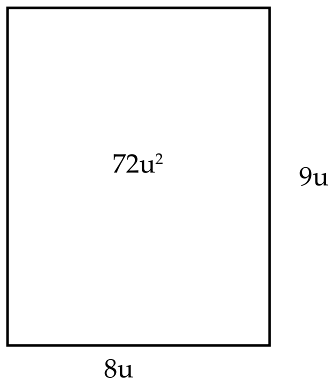


Así pues, la raíz cuadrada de 44 es 6.63 aproximadamente. Continuando de una manera semejante, se pueden obtener aproximaciones cada vez más exactas.

b) Calcular la raíz cuadrada de 72.

1. Se construye un rectángulo de área igual a 72 u^2 y uno de sus lados con valor cercano a la raíz. En este caso 8 u.
   La base será de 8 u.

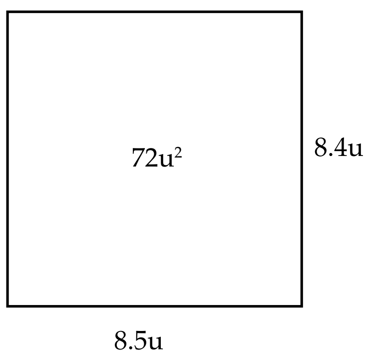
   Su altura es $\frac{72}{8} = 9$ u



2. La base del nuevo rectángulo será el promedio de la base y altura del rectángulo anterior.

$$\frac{8 \text{ u} + 9 \text{ u}}{2} = 8.5 \text{ u}$$

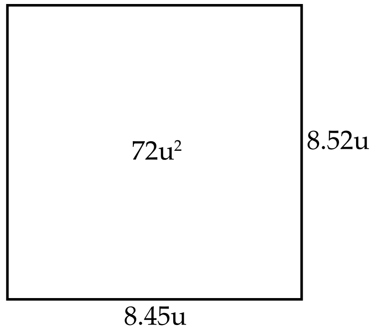
   Su altura es $\frac{72}{8.5} = 8.4$ u



3. La base del nuevo rectángulo se obtiene con el promedio de 8.5 y 8.4

$$\frac{8.5 + 8.4}{2} = 8.45 \text{ u}$$

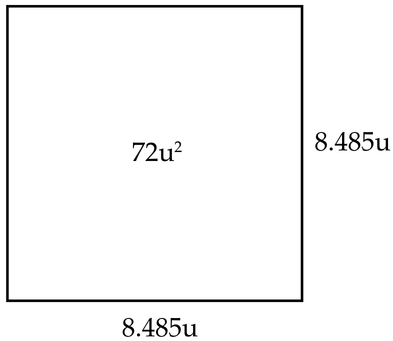
Su altura es $\dfrac{72}{8.45} = 8.52$ u



4. De forma semejante se construye el nuevo rectángulo.

Su altura es $\dfrac{8.45 + 8.52}{2} = 8.485$ u

Su altura es $\dfrac{72}{8.485} = 8.485$ u



Por tanto, la raíz cuadrada de 72 es aproximadamente 8.485. Si se desea obtener mayor exactitud se sigue procediendo en forma semejante. Este resultado puede verificarse utilizando la calculadora, la cual muestra que la raíz cuadrada de 72 es 8.4852813.

En estos ejemplos, por tratarse de longitudes, los resultados fueron positivos; pero no hay que olvidar que un número tiene dos raíces, una positiva y otra negativa.

CÁLCULO DE LA RAÍZ CUADRADA MEDIANTE EL ALGORITMO TRADICIONAL

Corresponde a la sesión de GA 2.18 CÓMO LLEGAR A LA RAÍZ

La raíz cuadrada es una operación de múltiples aplicaciones en situaciones problemáticas.

Por ejemplo: se quiere plantar 15 129 árboles a igual distancia, en un terreno cuadrado. ¿Cuántos deben plantarse en cada lado?

La solución a este problema se obtiene calculando la raíz cuadrada de 15 129; esto es, 123 árboles por lado.

Como se ha estudiado, el cálculo de la raíz cuadrada se puede hacer por diferentes métodos. El más usual es el que a continuación se muestra.

Hallar la raíz cuadrada de 15 876

a) Se indica la radicación y se separan con comas las cifras del radicando por parejas de derecha a izquierda (a cada pareja se le llama periodo). Puede quedar una cifra a la izquierda.

$$\sqrt{1,58,76}\;\Big|$$

b) Se busca un número que multiplicado por sí mismo dé como resultado de manera aproximada o exacta el primer periodo (1), se coloca en la parte correspondiente a la raíz y el cuadrado de dicho número se le resta al primer periodo.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1,58,76} & \underline{1} \\
\underline{-1} & \\
0 &
\end{array}$$

c) Se coloca el siguiente periodo a la altura de la diferencia obtenida (0), se duplica la cifra de la raíz y se escribe debajo de la misma.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\ 5\ 8\ 7\ 6} & \underline{1} \\
-1 & \\
\ \ 0\,5,8 & \underline{2}
\end{array}$$

d) Para hallar la segunda cifra de la raíz, se separa con una coma la primera cifra de la derecha de 058 y lo que queda (05) se divide entre el duplo de la raíz hallada, que en este caso es 2. El cociente se coloca a la derecha del 1 y debajo de sí mismo, multiplicándose por 22 (número formado por el doble de la primera cifra de la raíz y la segunda cifra hallada), y en seguida se resta el número 44 al 058.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1,\ 5\ 8,7\ 6} & \underline{12} \\
\underline{-1} & \\
\ \ 0\ 5,8 & \underline{22} \\
\underline{-\ \ \ 4\ 4} & \\
\ \ \ \ \ 1\ 4 &
\end{array}
\qquad 05 \div 2 = 2$$

e) Se coloca el siguiente periodo (76) a la derecha de la diferencia obtenida (14). Se duplica la raíz (12) y se escribe en un tercer renglón.

$\sqrt{1,5\,8,7\,6}$	12
–1	
0 5, 8	22
– 4 4	
1 4 7, 6	24

f) Para hallar la tercera cifra de la raíz se procede como en el inciso d). Se divide 147 entre 24 y el cociente se coloca a la derecha de 12 y de 24 en el primero y tercer renglón, respectivamente.

Después el producto de 6 por 246 se resta a 1 476.

$\sqrt{1,58,76}$	126	
–1		
0 58	22	$147 \div 24 = 6$
– 44		
147,6	246	
–1476		
0000		

Por tanto, la raíz cuadrada de 15 876 es 126 y –126. Si el residuo es cero, el cuadrado de la raíz deberá ser igual al radicando.

1 2 6	raíz	– 1 2 6	raíz
x 1 2 6		x – 1 2 6	
7 5 6		7 5 6	
2 5 2		2 5 6	
1 2 6		1 2 6	
1 5 8 7 6	radicando	1 5 8 7 6	radicando

Para comprobar el resultado de una raíz cuadrada, cuando el residuo es diferente de cero, el radicando deberá ser igual a la suma del cuadrado de la raíz y el residuo.

Ejemplo: calcular la raíz cuadrada de 61 124 y comprobar su resultado.

Utilizando el procedimiento antes explicado se tiene:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{6,\,1\,1,\,2\,4} & 247 \\ \hline
-4 & \\
2\,1\,1 & 44 \\ \hline
-1\,7\,6 & \\
3\,5\,2,\,4 & 487 \\ \hline
3\,4\,0\,9 & \\
1\,1\,5 & \qquad\qquad \text{residuo} \neq 115
\end{array}
$$

El resultado de esta radicación (247 y –247) se comprueba en la siguiente operación:

$$
\begin{array}{rl}
2\,4\,7 & \\
\times\,2\,4\,7 & \text{raíz} \\ \hline
1\,7\,2\,9 & \\
9\,8\,8 & \\
4\,9\,4 & \\ \hline
6\,1\,0\,9\,9 & \\
+\quad 1\,1\,5 & \text{residuo} \\ \hline
6\,1\,1\,2\,4 & \text{radicando}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
-\,2\,4\,7 & \\
\times\,-\,2\,4\,7 & \text{raíz} \\ \hline
1\,7\,2\,9 & \\
9\,8\,8 & \\
4\,9\,4 & \\ \hline
6\,1\,0\,0\,9 & \\
+\quad 1\,1\,5 & \text{residuo} \\ \hline
6\,1\,1\,2\,4 & \text{radicando}
\end{array}
$$

El cálculo de la raíz cuadrada es de gran utilidad en ramas de la matemática como la aritmética, la geometría y el álgebra, entre otras.

RAÍZ CUADRADA DE DECIMALES POR EL ALGORITMO TRADICIONAL

Corresponde a la sesión de GA 2.19 ASTILLAS DE RAÍZ

Como se vio anteriormente, cuando se obtiene la raíz cuadrada de un número, ésta quizá no sea exacta, como en el siguiente caso:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{1,\,55} & 12 \\ \hline
0\;\,55 & \\
11 & 22 \\ \hline
\end{array}
$$

Si esto sucede, es posible continuar extrayendo raíz y aproximar a tantas cifras decimales como se desee con sólo agregar, en el radicando, un punto y tantas parejas de ceros (periodos) como cifras decimales se quieran. Obsérvese la raíz anterior aproximada sólo a décimos.

√1,5 5	12.4
0 5 5	2 2
1 1 0 0	2 4 4
1 2 4	

En este caso, nada más se aumentaron dos ceros junto al residuo, se colocó un punto en la raíz y se continuó con el mismo procedimiento que se realiza cuando son enteros.

Ahora, analícese el siguiente ejemplo que se aproximará hasta centésimos.

√32,56. 0000	57. 06
7 56	10 7
0 07 0000	11 40
01564	11 406

Aquí se aumentó una pareja de ceros en el radicando y se puso el punto en la raíz. Se continuó con el procedimiento normal como si no hubiera punto, y después se agregó otra pareja de ceros en el radicando (pues la aproximación sería hasta centésimos). Y por último se repitió el procedimiento anterior.

La comprobación se realiza de la misma forma que cuando no hay aproximación decimal. Obsérvese que se multiplica la raíz por sí misma, sumándose al producto el residuo, el cual se coloca en el lugar que le corresponde.

12.4	57.06
x 12.4	x 57.06
496	34236
248	39942
124	28530
153.76	3255.8436
1 24	1564
155.00	3256.0000

También a los números decimales se les puede extraer raíz cuadrada, siendo el procedimiento semejante al empleado con números naturales; aunque la separación en periodos de dos cifras se efectúa hacia la izquierda dei punto decimal (cuando son enteros) y, hacia la derecha dei punto para los decimales. Si el último periodo decimal tiene una sola cifra, se completa con un cero.

Ejemplo:

Se desea extraer raíz cuadrada a 8.7694. La separación por periodos queda:

$$\sqrt{8.76,94}$$

Se resuelve la raíz como si se tratara de enteros:

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{8.76,94} & \underline{2.96} \\
\;\;4\ 76 & \underline{4\ 9} \\
\;\;\;\;3\ 59\ 4 & \underline{5\ 86} \\
\;\;\;\;\;\;07\ 8 &
\end{array}$$

Para colocar el punto decimal en el resultado, se separan tantas cifras decimales como periodos haya en la parte decimal del radicando. Así, en 8.7694 se formaron **dos** periodos en la parte decimal, por tanto, habrá **dos** decimales en la raíz.

Por otra parte, la comprobación de la raíz para los números decimales es igual que para los naturales. Véase.

$$\begin{array}{rr}
 & 2\,.\,96 \\
\times & 2\,.\,96 \\
\hline
 & 1\,7\,7\,6\;\; \\
 & 2\,6\,6\,4\;\;\;\;\;\; \\
 & 5\,9\,2\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; \\
\hline
 & 8\,.7\,6\,1\,6 \\
 & 7\,8 \\
\hline
 & 8\,.7\,6\,9\,4
\end{array}$$

Pero recuérdese que toda raíz tiene dos resultados: uno positivo y uno negativo. Así que también debe comprobarse con la raíz negativa.

$$
\begin{array}{rcr}
(-2.96)\ (-2.96) & = & 8.7616 \\
 & + & 78 \\
\hline
 & & 8.7694
\end{array}
$$

Como puede observarse, el residuo correspondía a los diezmilésimos. Por tanto, al sumarse en el producto, se colocó en el lugar señalado.

La raíz cuadrada, al igual que las demás operaciones, se usa para resolver problemas. Véase la solución de éste:

¿Cuál es la medida del radio de un círculo cuya área es de 19.635 cm^2?

Como el área de un círculo se obtiene multiplicando πr^2, se despeja la incógnita quedando:

$$A = \pi r^2 \longrightarrow r = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}}$$

Se sustituye:

$$r = \sqrt{\frac{19.635}{3.14}}$$

Se hacen operaciones:

$$r = \sqrt{6.25} \qquad \boxed{r = 2.5 \text{ cm}} \longleftarrow \text{valor solicitado}$$

CONCEPTO DE ERROR EN LA MEDICIÓN

Corresponde a la sesión de GA 2.21 ¿ERROR O EQUIVOCACIÓN?

En toda medición hay errores. Pero es conveniente aclarar que no es lo mismo “error” que “equivocación”, pues ésta indica descuido por parte de quien realiza la medición, ya sea al anotar la lectura o al hacer el cálculo aritmético. En cambio, el “error” puede originarse por tres causas:

1. La imperfección de los aparatos con que se realizan las mediciones, debida a los defectos en su fabricación.

Ejemplo:

Si se realiza una medición de longitud con una cinta que no tiene sus graduaciones equidistantes, o simplemente si la medida del instrumento empleado no corresponde a la que se le supone, por ser de fabricación defectuosa.

2. El medio en el cual se realiza la medición.

Ejemplo:

Si se mide una longitud determinada con una regla metálica expuesta a alta temperatura, la medida de la regla se alterará, pues los metales se dilatan con el calor. Así, la medición tendrá un error.

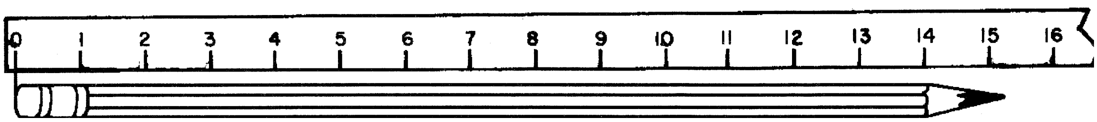
3. La imperfección en los sentidos de quien realiza la medición.

Ejemplo:

Si se mide una longitud con un instrumento que es menor, sería necesario colocarlo varias veces hasta cubrir dicha longitud. En este proceso es posible que se coloque mal el instrumento en una de esas ocasiones y así se introduce un error en la medición.

O bien, cuando el observador se encuentra en determinada posición con respecto al instrumento y al objeto que se mide al hacer su apreciación de la medida de esa dimensión. No obstante, si la medición se realiza por varias personas, se puede comprobar que existe una variación —aunque mínima— en los datos.

Por otra parte, siempre que se realiza una medición se hace una estimación. Por ejemplo, se mide la longitud de un lápiz con una regla graduada hasta centímetros.



Si, por ejemplo, el observador nota que la punta queda entre dos líneas que señalan centímetros y realiza una división en diez partes iguales de ese centímetro, decidiendo a qué punto corresponde el extremo del lápiz, entonces el observador está haciendo una estimación de las décimas de centímetro.

Así, si se pidiera a dos personas que realizaran la medición con una aproximación de décimas de centímetro, es muy probable que dieran estas respuestas:

15.2 cm
15.3 cm

Como puede verse, no hay duda en los centímetros; pero al tratar de ser más precisos, lo que se hace es una estimación, pues las décimas de centímetro no están señaladas en esta regla.

De igual forma que en el ejemplo anterior, al medir una dimensión cualquiera se realiza una estimación que dependerá del grado de precisión que se requiera y del instrumento utilizado para medir.

Sin embargo, existe un máximo error posible en la medición y éste consiste en la mitad de la unidad más pequeña perteneciente a la medida empleada.

Así, en la medida del lápiz, el máximo error sería medio centímetro más o medio centímetro menos, lo que se representa como (15 ± 0.5) cm. A esto se le conoce como acotación del error.

Por otra parte, si se quiere definir matemáticamente al "error", se puede decir que es la diferencia entre el valor (x) que se considera aproximado y el valor real (X), que queda expresado simbólicamente así:

$\boxed{e_x = x - X}$ donde e_x será llamado "error absoluto".

Obsérvese el siguiente ejemplo:

En un recipiente hay frijoles secos, que no se pueden contar. Sin embargo, debe calcularse cuántos hay en el recipiente.

La forma de calcular esa cantidad puede ser muy variada, pero si después de calcularla es posible contar los frijoles, entonces quizá se incurra en lo que se llama "error absoluto". Es decir:

$$\boxed{e_x = x - X}$$

Si se considera que el cálculo fue de 3 000 frijoles y al contarlos se vio que sólo había 2 650, se determina el error absoluto basándose en la fórmula dada.

$e_x = 3000 - 2650$

$$\boxed{e_x = 350}$$

FUENTES DE ERROR EN UN CÁLCULO

Corresponde a la sesión de GA 2.22 ¿QUIÉN TUVO LA CULPA?

Como se recordará, existen diferencias entre “error y “equivocación” al medir las dimensiones de cualquier cosa; además, esta diferencia se conserva cuando hay variación en un cálculo. Es decir, si la persona que hace el cálculo se distrae y cambia las cifras, el orden o el punto decimal del lugar que le corresponda, está cometiendo una **equivocación.**

En cambio, el error en un cálculo puede introducirse, fundamentalmente, por tres medios o fuentes. A saber:

Error en los datos (llamado también error de entrada).

Este se produce al acotar las medidas de un objeto cualquiera, debido a los yerros que se cometen en la medición. Por ejemplo, cuando se miden los lados de un rectángulo para calcular su área, se puede cometer un error si el instrumento de medida tiene algún defecto; si se da alguna circunstancia en el medio que cambie las dimensiones del instrumento o del objeto a medir.

Error por trabajar con datos redondeados o aproximados

Se presenta cuando se trabaja con números redondeados o truncados para simplificar los cálculos. Por ejemplo, cuando se quiere calcular el perímetro de un círculo y para ello es necesario usar el valor de n; sin embargo, no es posible tomar todas las cifras irracionales, por lo que se acostumbra usar sólo el valor de 3.14. Lo anterior introduce un error, pues se está usando un valor truncado.

Error de procedimiento

Este puede darse cuando el observador que realiza la medición no está en la posición adecuada; o bien, cuando no conoce el manejo adecuado del instrumento con el cual efectúa la medición.

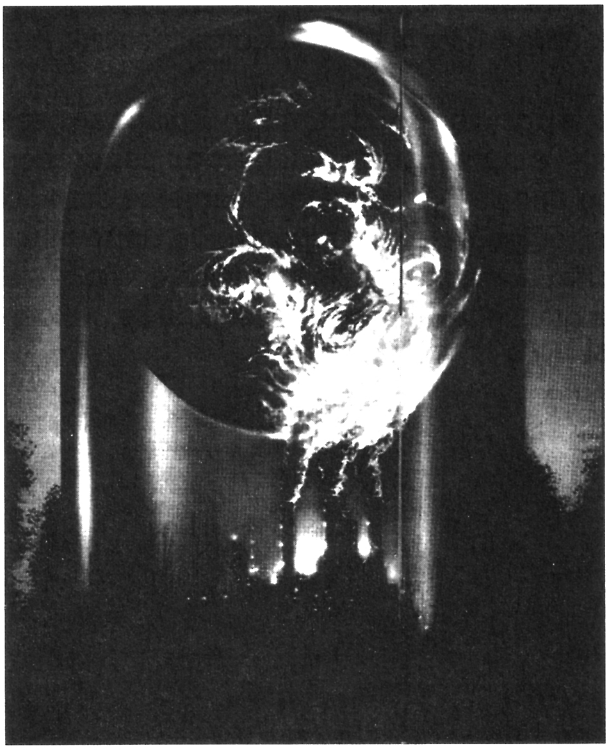
Error de salida

Se da cuando el resultado consta de tantas cifras que no se pueden anotar todas por falta de espacio; así que se redondea el resultado, o bien se deja trunco. También es común que suceda cuando se trabaja con la calculadora, pues en ocasiones la pantalla no proporciona todas las cifras.

Como puede observarse, la así llamada "ciencia exacta" no lo es tanto cuando maneja aproximaciones; lo cual suele suceder.

Capítulo 3

ÁLGEBRA



El papiro Rhind, del antiguo Egipto, tiene vestigios del empleo del álgebra desde tiempos remotos en la resolución de sencillas ecuaciones. Sin embargo, es una ciencia relativamente nueva pues es hasta el siglo XVI cuando se establece el uso de signos y símbolos que se utilizan actualmente y alcanzan gran desarrollo.

En la actualidad es imposible separarla de otras ramas de las matemáticas y su uso se hace indispensable en la resolución de problemas en que esta rama de las matemáticas resulta una herramienta importante.

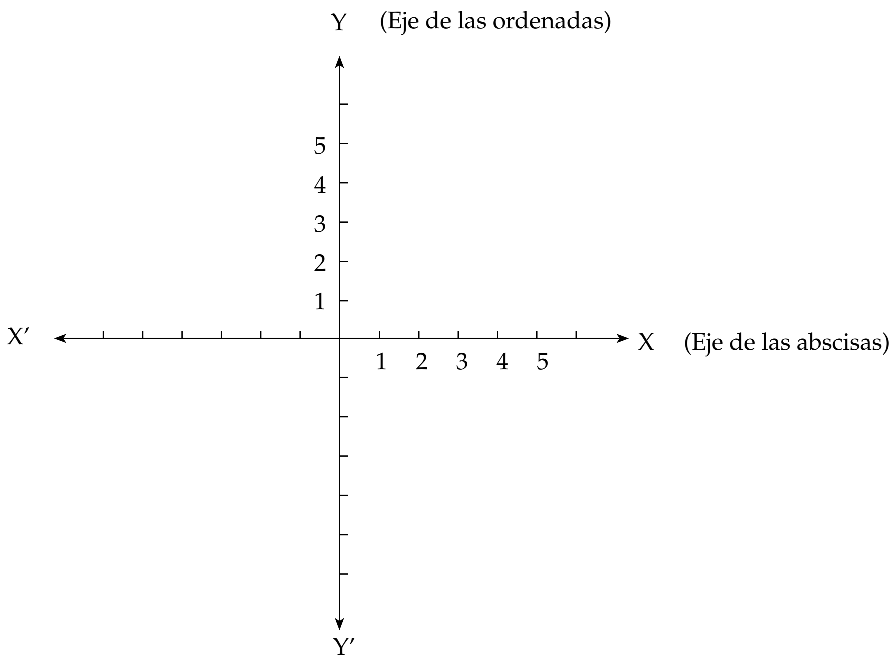
PLANO CARTESIANO

Corresponde a la sesión de GA 3.25 ¡UBÍCALOS!

Un navegante o cualquier persona que utiliza instrumentos que sirvan para orientarse o para llegar a un lugar determinado, utiliza herramientas que son muy comunes: la brújula y la rosa de los vientos.

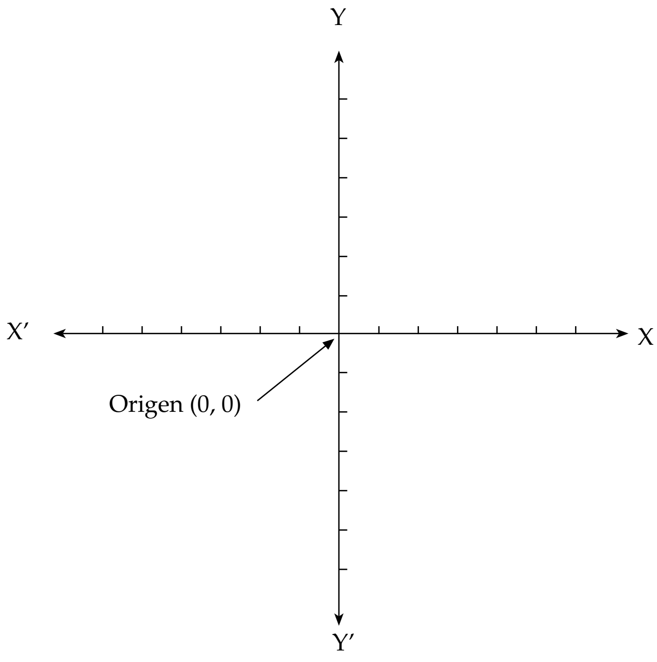
En el estudio del álgebra existe la necesidad de localizar puntos en el plano.

Para poder describir la posición de un punto en el plano se necesitan dos rectas numéricas. Con éstas se construye un sistema de ejes coordenados, los cuales determinan un plano que se le conoce técnicamente como plano cartesiano. El trazo de las dos rectas se ejecuta perpendicularmente; la recta que se encuentra en **posición horizontal** se le identifica como el eje de las abscisas o **de las x** y la recta que tiene la **posición vertical** se conoce como **el eje de las ordenadas** o **de las y.**



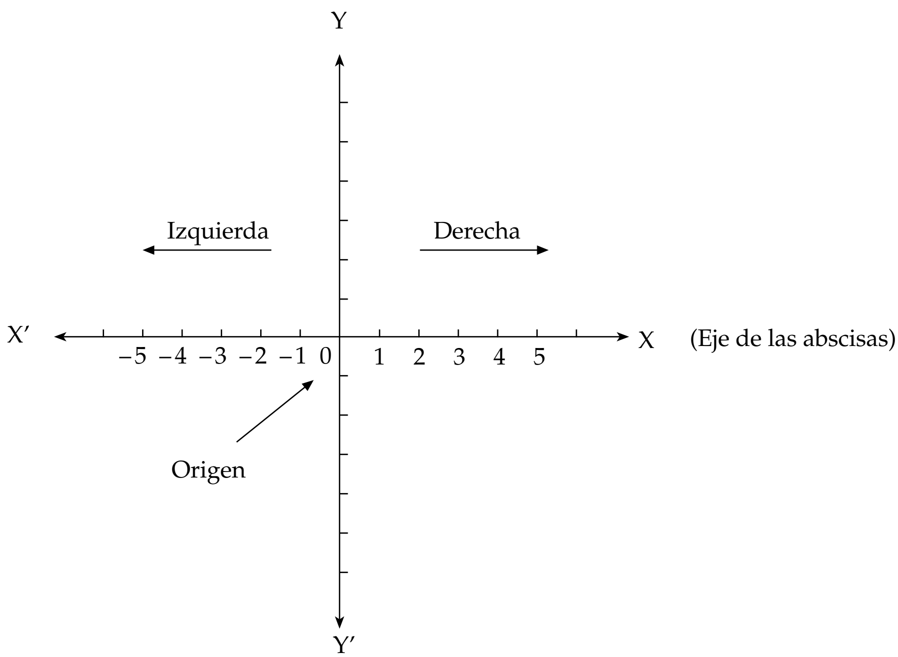
Plano cartesiano

Las rectas perpendiculares **x**, **y**, son conocidas como **ejes coordenados,** y el punto donde éstas se cortan recibe el nombre de **origen,** cuyas coordenadas son (0,0).

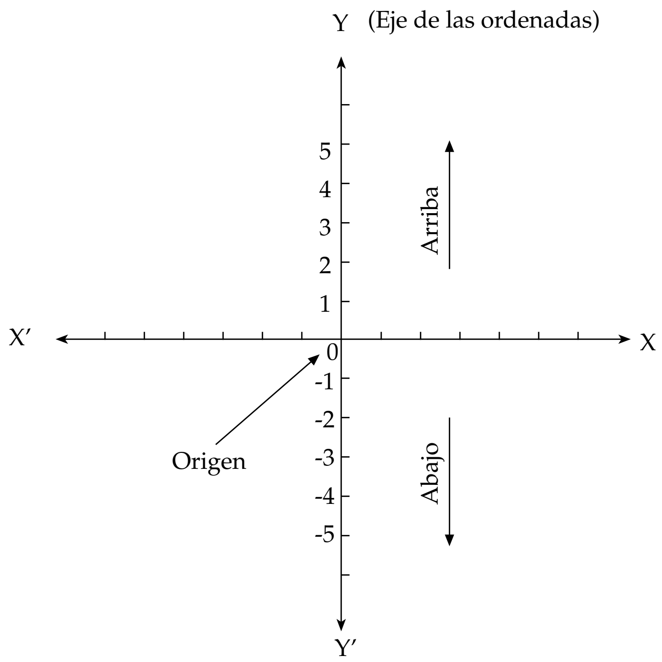


Ejes coordenadas X, X', Y, Y'

Si uno se sitúa en el origen, observa que hacia la derecha están los **valores positivos**. Asimismo, se percata de que del origen hacia la izquierda se tienen **valores negativos**.



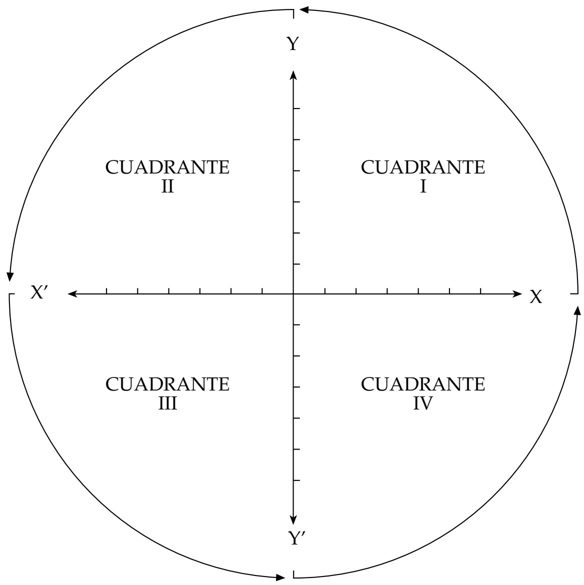
Ahora, ubicándose de nueva cuenta en el origen se tiene que hacia arriba están **valores positivos** y hacia abajo los **valores negativos.**



De esto se deduce que:

1) En el primer cuadrante la abscisa y la ordenada son positivas.
2) En el segundo cuadrante la abscisa es negativa y la ordenada positiva.
3) En el tercer cuadrante tanto la abscisa como la ordenada son negativas.
4) En el cuarto cuadrante la abscisa es positiva y la ordenada negativa.

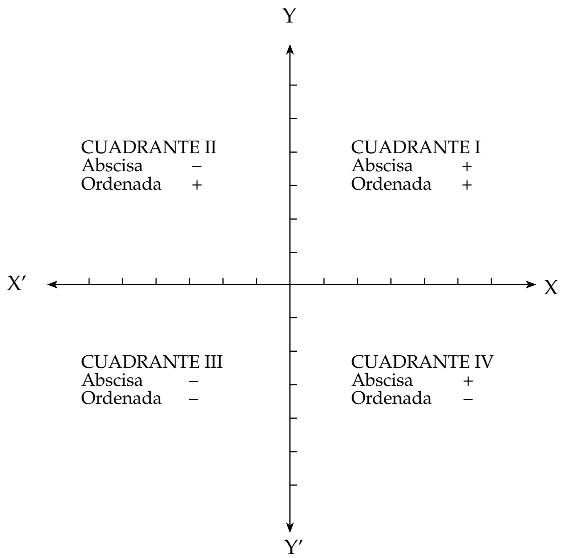
Como puede observarse, el plano cartesiano está dividido en **cuatro partes,** las cuales son conocidas como **cuadrantes.** Dichos cuadrantes se simbolizan con números romanos; por lo que respecta al **orden de los cuadrantes**, éste se establece en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, comenzando por el cuadrante superior derecho y terminando con el cuadrante inferior derecho.



Una vez que se ha determinado el plano cartesiano se está en posibilidad de representar **pares ordenados de números** en dicho plano.

Si se tiene la pareja ordenada (**a**, **b**), hay que considerar que **a** es la **primera componente** y se localiza en el eje de las abscisas, por lo tanto se le llama la **abscisa del punto.** En tanto que **b** es la **segunda componente** y se localiza en el eje de las ordenadas; así pues, se le llama **ordenada del punto**. Al par ordenado también se le conoce como las coordenadas de un punto.

Una vez hechas estas consideraciones es importante señalar que los valores en cada cuadrante del plano cartesiano se representan así:



Con estos elementos se pueden localizar puntos en el plano. Graficar un par ordenado de números significa localizar un punto en el plano cartesiano.

¿Cómo se logra esto?

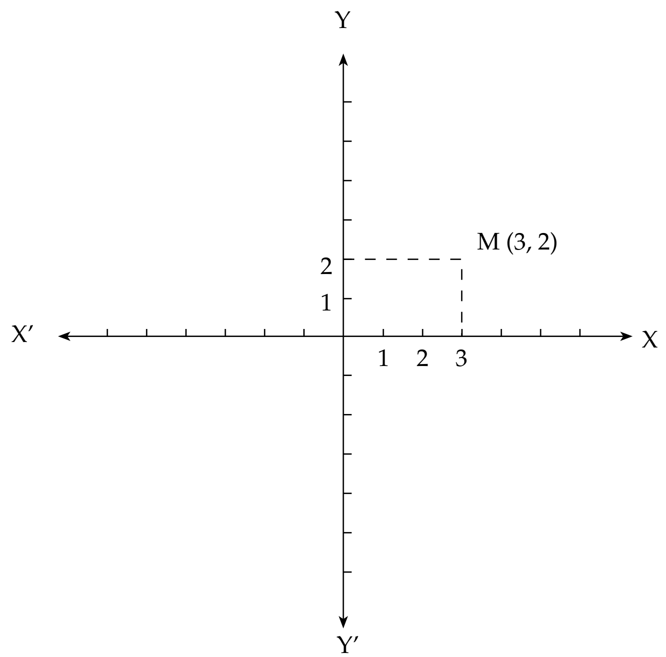
Supóngase que se necesita localizar el punto M cuyas coordenadas son (3, 2).

Se procede de la siguiente manera:

1. Se localiza en el **eje de las abscisas** la "primera componente" (en este caso es 3) de la pareja ordenada. A partir de ese punto se traza una recta punteada paralela al **eje de las ordenadas.**

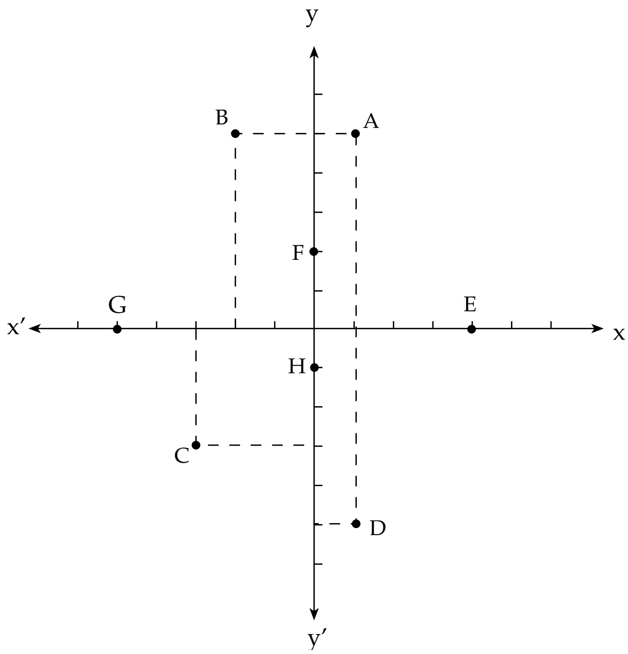
2. Se localiza en el **eje de las abscisas** la "segunda componente" (en este caso es 2) de la pareja ordenada. Se traza también una recta (punteada) paralela al **eje de las abscisas.**

3) En el cruce de las rectas punteadas se localiza el punto **M**, el cual representa a la pareja.



Ejemplos:

Localiza en un plano cartesiano los siguientes pares ordenados: A (1, 5), B (–2, 5), C (–3, –3), D (1,–5), E (4, 0), F (0, 2), G (–5, 0), H (0, –1), I (0, 0).



Al adquirir la habilidad en el uso del plano cartesiano, podrás desarrollar la capacidad de representar e interpretar gráficamente expresiones algebraicas; asimismo, se te facilitará el aprendizaje de otros temas de nivel superior.

FUNCIONES

Corresponde a la sesión de GA 3.26 UNO DEPENDE DE OTRO

Existen cosas que cambian en **función** de otra. Por ejemplo, la hora del día varía en función de la posición del Sol con respecto al cenit. Si se desea hacer un viaje, el costo del pasaje variará en función de la distancia del lugar que se desea visitar.

El término de función es muy importante en matemáticas y sin él muchos de sus conceptos no habrían evolucionado hasta ser lo que son ahora.

Considérese el siguiente ejemplo:

Se desea conocer el perímetro de algunos círculos conociendo la medida de sus diámetros. Se toma $\pi = 3.1416$

Círculo 1 = 10 cm de diámetro, por tanto P =	31.416	cm
Círculo 2 = 15 cm de diámetro, por tanto P =	47.12	cm
Círculo 3 = 18 cm de diámetro, por tanto P =	56.54	cm
Círculo 4 = 25 cm de diámetro, por tanto P =	78.54	cm
Círculo 5 = 32 cm de diámetro, por tanto P =	100.53	cm

Dando valores a la medida del diámetro es posible encontrar el perímetro del círculo, aplicando la regla que existe entre esos dos valores, ésta es:

$$P = \pi \bullet d$$

En esa expresión se localizan la constante π y las variables **P**, **d**.

Un símbolo o literal que representa un valor específico recibe el nombre de **constante.**

Una literal o símbolo que puede adquirir diferentes valores recibe el nombre de **variable.**

Así, en la expresión anterior, la π sólo puede tomar un valor, por tanto es constante.

En cambio, la medida de los diámetros varía independientemente en cada círculo y sus perímetros dependen de la medida que adquiera el diámetro. Por tanto **d** y **P** son variables.

En este caso, por variar independientemente de otras medidas, a la medida del diámetro se le conoce como **variable independiente.**

Como la medida del perímetro depende del valor del diámetro se le conoce como **variable dependiente.**

Asígnesele a la medida del diámetro la letra **x** y a la del perímetro la letra **y**.

Se puede observar que siempre que cambia el valor de x cambia el valor de y. Esto es:

Si el diámetro es 10 cm, el perímetro es 31.416 cm.
Si el diámetro es 15 cm, el perímetro es 47.12 cm.
Si el diámetro es 18 cm, el perímetro es 56.54 cm.

En el ejemplo anterior, la regla de funcionalidad es P = π d y sustituyendo en ella **x**, **y** quedaría como:

$$y = \pi x$$

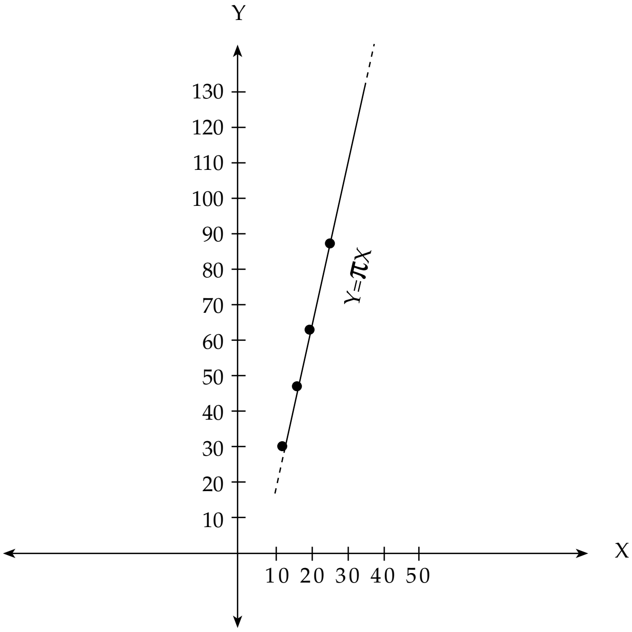
Así, de acuerdo con los valores que adquiere **x** (variable independiente) variará el valor de **y** (variable dependiente), y se formarán con cada pareja correspondiente **(x, y)** los **pares ordenados o coordenadas de la gráfica.**

Los datos de **x** y **y** se pueden agrupar en una tabla, que puede ser horizontal o vertical, anotando en el primer renglón los valores de **x**, y en segundo los de **y**.

x	10	15	18	25	32
y = (x)	31.416	47.12	56.54	78.54	100.53

x	y	coordenadas
10	31.416	(10, 31.416)
15	47.12	(15, 47.12)
18	56.54	(18 , 56.54)
25	78.54	(25, 78.54)
32	100.53	(32, 100.53)

Estos datos pueden representarse en forma gráfica localizando en el plano cartesiano los pares ordenados y uniendo dichos puntos.



Esta es la representación gráfica de la función: $y = \pi x$.

Véase otro ejemplo con la siguiente función:

$$y = -2x + 3$$

Para realizar la tabulación se dan valores arbitrarios a **x**, pues es la variable independiente de los cuales se obtendrán los valores de **y**, la variable dependiente.

$y = -2x + 3$

x	y
1	1
2	–1
3	–3
4	–5
5	–7

$y = -2\ (1) + 3$

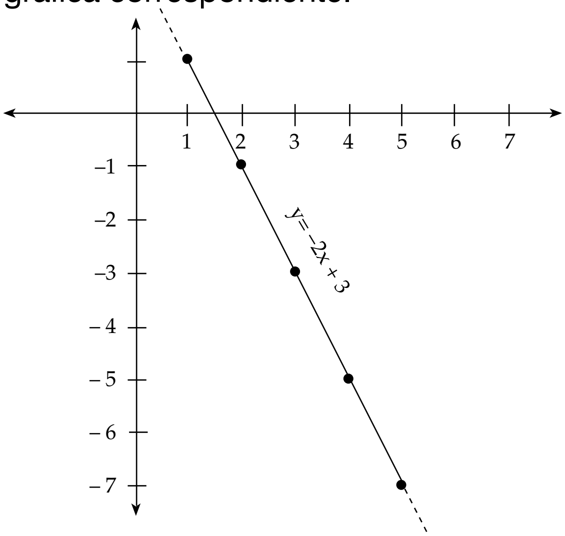
$y = -2\ (2) + 3$

$y = -2\ (3) + 3$

$y = -2\ (4) + 3$

$y = -2\ (5) + 3$

De esa forma se obtienen las parejas ordenadas con las cuales se establecen las coordenadas de la gráfica correspondiente.



Si se localizan en la gráfica las coordenadas **x**, **y** no consideradas en la tabulación, y se sustituyen en la regla de funcionalidad, se puede comprobar que se cumplen.

Tómense las coordenadas (4.5, –6) para comprobar con ellas la regla:

$$\begin{aligned} y &= -2x + 3 \\ -6 &= -2\,(4.5) + 3 \\ -6 &= -9 + 3 \\ -6 &= -6 \end{aligned}$$

Esta regla se cumple para cualquier punto de la gráfica correspondiente, la cual es única, independientemente de los valores asignados a **x**.

Una función puede ser de primero, segundo, tercero u otro grado, de acuerdo con el mayor exponente que tenga **x** en la ecuación, y la representación gráfica de cada una de ellas tendrá características particulares.

LAS FUNCIONES Y SUS APLICACIONES

Corresponde a la sesión de GA 3.27 LA FUNCIÓN DEBE CONTINUAR

El concepto de función se encuentra implícito en diversas actividades, y su empleo es innegable en ciencias como la física, la geometría, la medicina, etc. Obsérvense algunos ejemplos.

Se sabe que la velocidad de la luz es de 300 000 $\frac{km}{s}$ con lo cual se puede establecer la distancia que recorre en cuatro, cinco, seis, siete, segundos, etcétera.

Si en un segundo recorre 300 000 km
en tres segundos recorre 900 000 km
en cinco segundos recorre 1 500 000 km
en siete segundos recorre 2 100 000 km
en nueve segundos recorre 2 700 000 km

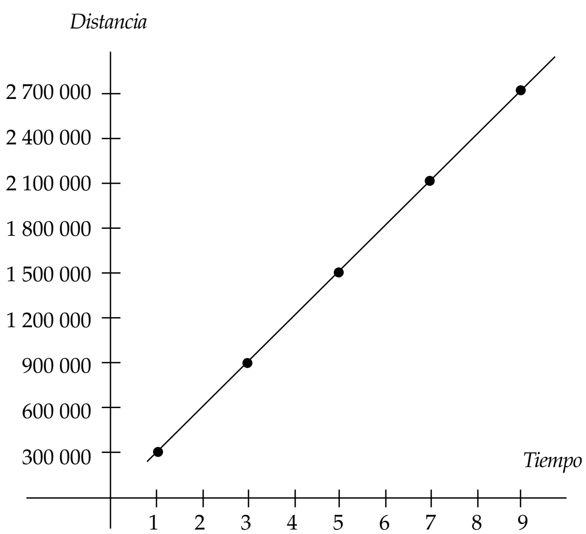
Se puede apreciar que la distancia que recorre la luz depende del tiempo transcurrido; por tanto el tiempo es la variable independiente (**x**), la distancia es la variable dependiente (**y**), y la regla de funcionalidad:

$$\text{distancia} = (\text{velocidad de la luz})\ (\text{tiempo})$$
$$y = 300\ 000\ x$$

Aplicándola, se obtiene la siguiente tabulación, con la que se puede realizar la gráfica.

y = 300 000 x

x	y
1	300 000
3	900 000
5	1 500 000
7	2 100 000
9	2 700 000



La gráfica muestra cómo a mayor tiempo transcurrido, mayor distancia recorrida por la luz.

Si se toman coordenadas de la gráfica no consideradas en la tabulación puede comprobarse la regla de funcionalidad.

Tómense las coordenadas (4, 1 200 000)

$$\begin{aligned} y &= 300\,000 \quad x \\ 1\,200\,000 &= 300\,000 \quad (4) \\ 1\,200\,000 &= 1\,200\,000 \end{aligned}$$

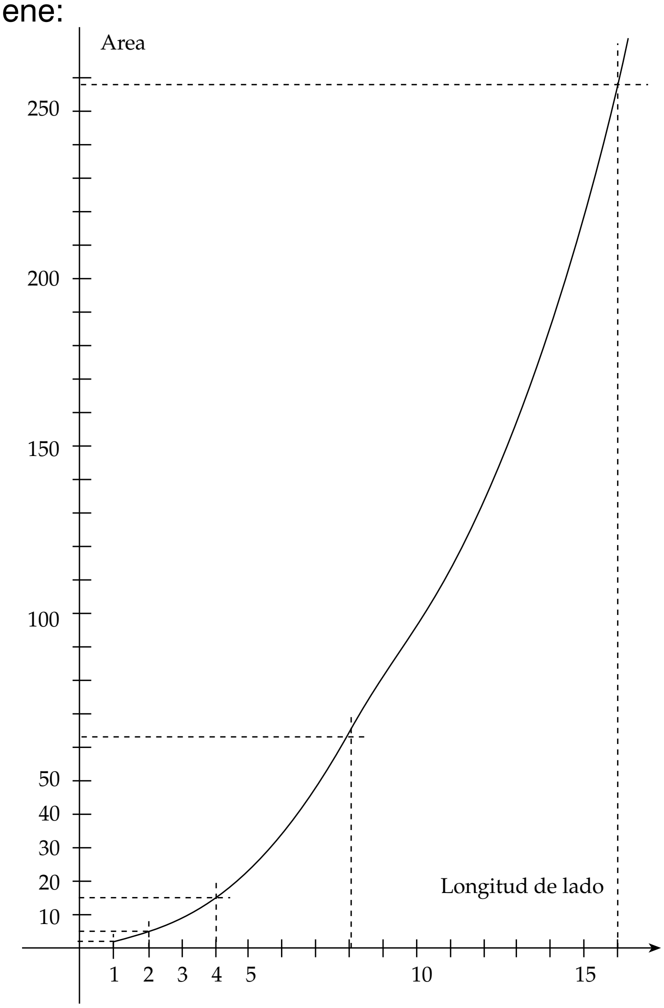
En geometría se sabe que al duplicar las longitudes de un dibujo en una escala de ampliación, su área se cuadruplica. De modo que si un cuadrado tiene de lado una unidad, su área es de 1 u^2; si tiene 2 u de lado, su área será de 4 u^2; si tiene 4 u de lado su área será de 16 u^2, etcétera.

Se observa que el área del cuadrado depende de la longitud de su lado, por tanto, el área es la variable dependiente y la longitud del lado la variable independiente.

Y graficando esos valores se tiene:

$y = x^2$

x	y
1	1
2	4
4	16
8	64
16	256



Se observa que las gráficas de las funciones anteriores presentan características particulares; la primera es una recta, por lo que dicha función es llamada lineal y su regla de funcionalidad es de primer grado y la de la segunda es cuadrática con la que se obtiene una curva.

Otro problema en donde se utilizan las funciones es el siguiente:

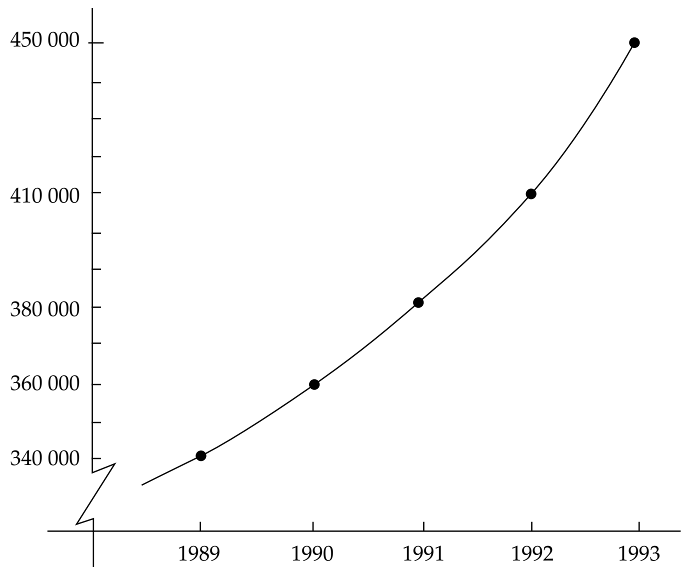
En los últimos cinco años se reportó la población de un lugar con las siguientes cifras:

1989 ———— 340 000
1990 ———— 360 000
1991 ———— 380 000
1992 ———— 410 000
1993 ———— 450 000

En este caso, los años representan la variable independiente, y la población la dependiente.

Cuya gráfica será la siguiente:

x	y
1989	340,000
1990	360,000
1991	380,000
1992	410,000
1993	450,000



Estas son sólo algunas aplicaciones de las funciones y, si se analiza, se encuentran en muchas otras actividades humanas.

GRÁFICA DE FUNCIONES DE LAS FORMAS y = mx + b, y = mx – b

Corresponde a la sesión de GA 3.28 CON DOS SE PUEDE

A las funciones de la forma y=mx+b, y = mx – b se les llama funciones lineales, esto es, sus gráficas son líneas rectas.

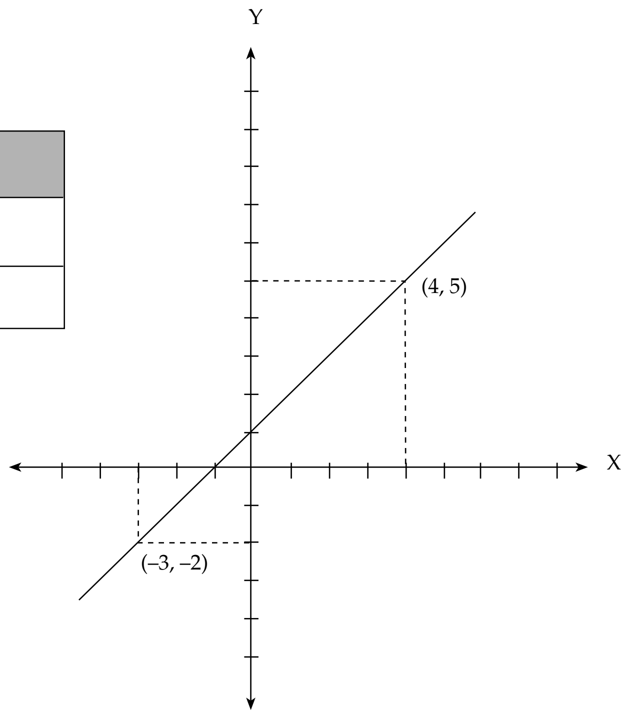
En este tipo de funciones **y** representa la variable dependiente, **x** la variable independiente y **m** y **b** son constantes, es decir, su valor no varía aunque cambien los valores de las variables en una función.

Analícense algunos casos para la función y = mx + b:

Se tabula para encontrar los valores de **x** y **y**.

y = x + 1

x	y	puntos
–3	–2	(–3 , –2)
4	5	(4 , 5)

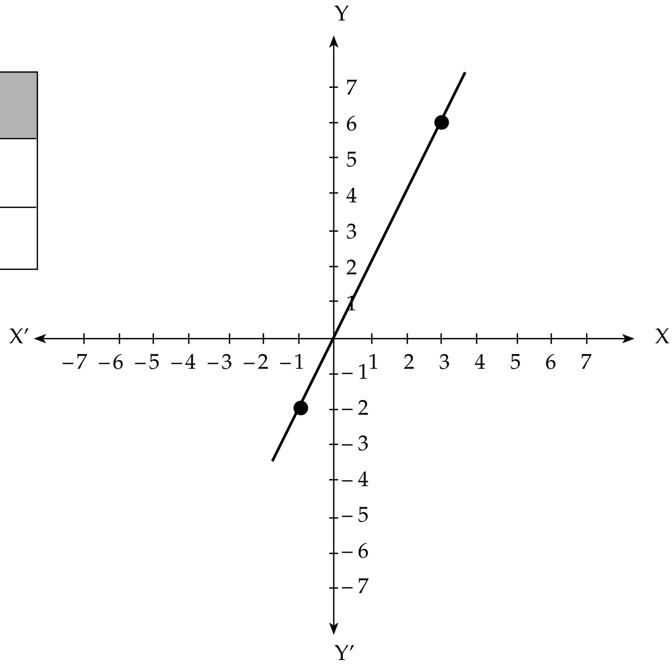


Nótese que la recta intersecta al eje de las ordenadas en el punto 1 —que es el valor de la constante b en la función dada— y que el ángulo que forma con el eje de las abscisas es menor de 90°.

Sea y = 2x + 0

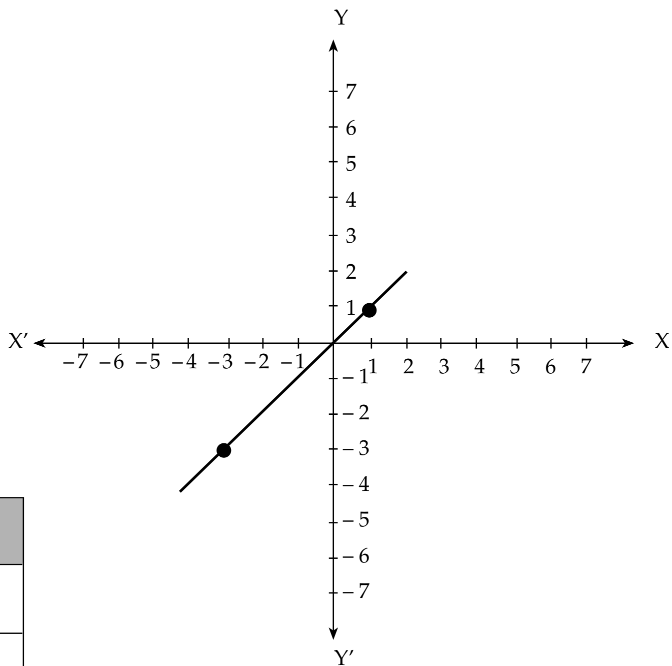
Al tabular se obtiene:

x	y	puntos
–1	–2	(–1 , –2)
3	6	(3 , 6)



Obsérvese que, en este caso, la recta pasa por el origen y forma un ángulo menor que 90° con el eje de las abscisas.

Ahora se revisará la gráfica para y = mx-b; por ejemplo y = x - 0, o sea, y = x, esto es, cuando **m** = 1 y **b** = o.



Tabulación

x	y	puntos
–3	–3	(–3 , –3)
1	1	(1 , 1)

Véase que la recta obtenida forma un ángulo de 45° con el eje de las abscisas y que pasa por el origen. También se puede decir que corta al eje de las ordenadas en el punto cuyo valor corresponde a **b** en la función.

La distancia del origen al punto donde la recta corta al eje de las ordenadas se conoce como **ordenada al origen.**

En síntesis, se puede decir que: en las funciones y = mx+b, y = mx–**b** si **b** es igual a cero, la recta obtenida pasa por el origen y si **b** tiene otro valor, la recta corta al eje de las ordenadas en el punto determinado por **b**.

GRÁFICA DE FUNCIONES DE LAS FORMAS y = –mx + b, y = –mx – b

Corresponde a la sesión de GA 3.29 ALGO CAMBIA

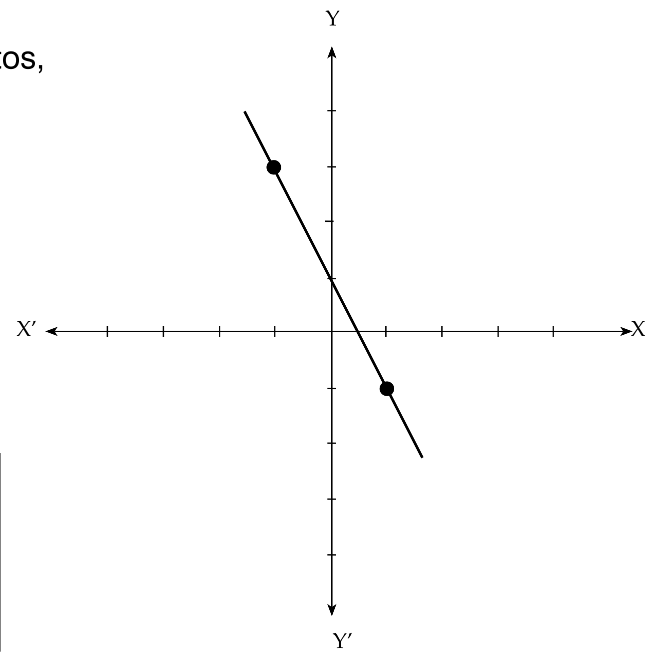
Como ya se vio, una función de las formas y = mx + b, y = mx – b dan origen a una recta, por lo que se conocen como funciones lineales.

En seguida, se verán las gráficas correspondientes a otras funciones lineales de la forma y = –mx + b, y = –mx – b.

a) Graficar la función y = –2x + 1

Se tabula para obtener los puntos,

$y = -2(-1) + 1$	$y = -2(1) + 1$
$y = 2+1$	$y = -2 + 1$
$y = 3$	$y = -1$



x	y	puntos
–1	3	(–1 , –3)
1	–1	(1 , –1)

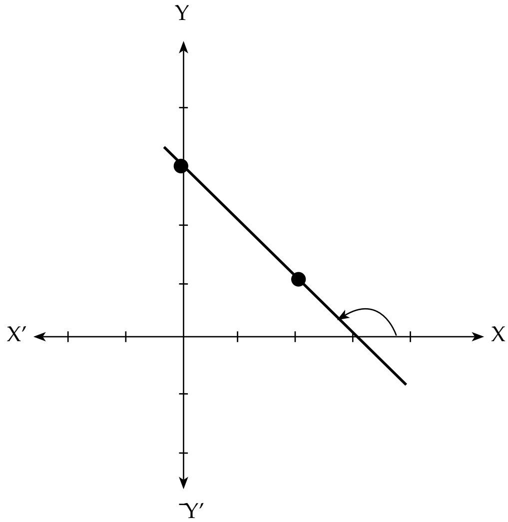
Obsérvese que la recta forma un ángulo mayor de 90° con el eje de las abscisas. Además, corta al eje de las ordenadas en el punto 1, que es el mismo valor de <u>b</u> en la función.

b) Graficar la función $y = -1\,x + 3$

Se tabula para obtener los puntos

$y = -1\,(0) + 3$	$y = -1\,(2) + 3$
$y = 0 + 3$	$y = -2 + 3$
$y = 3$	$y = 1$

x	y	puntos
0	3	(0 , 3)
2	1	(2 , 1)



Ahora se analizará la gráfica correspondiente a la función de la forma $y = -mx - b$

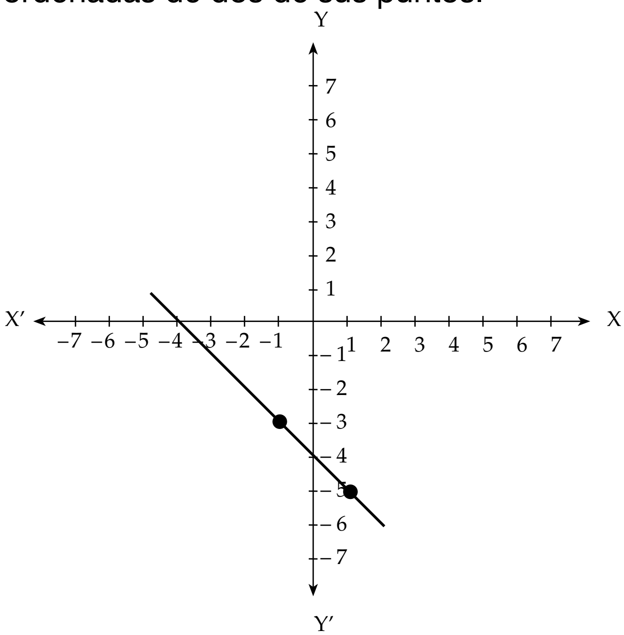
a) Graficar la función $y = -x - 4$ donde $m = -1$ y $b = -4$

Se tabula encontrando las coordenadas de dos de sus puntos.

$y = -x - 4$	$y = -x - 4$
$y = -(-1) - 4$	$y = -(1) - 4$
$y = 1 - 4$	$y = -1 - 4$
$y = -3$	$y = -5$

$y = -x - 4$

x	y	puntos
–1	–3	(–1 , –3)
1	–5	(1 , –5)



b) Graficar la función $y = -2x - 3$ donde $m = -2$ y $b = -3$

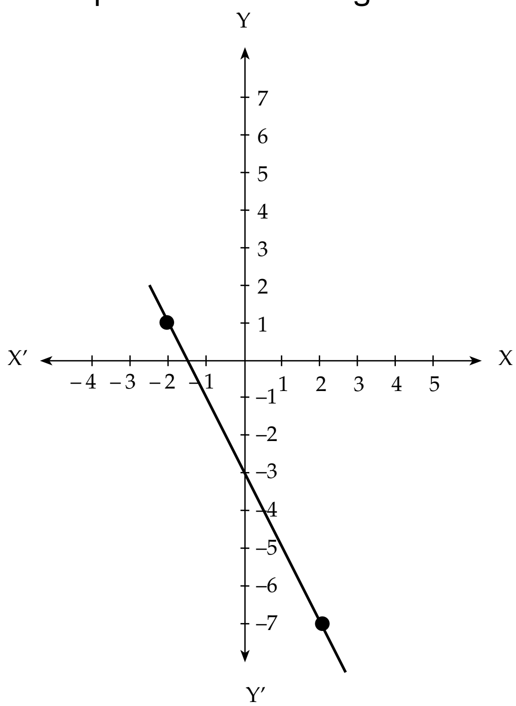
Se tabula buscando las coordenadas de dos puntos.

x	y	puntos
2	–7	(2 , 7)
–2	1	(–2 , 1)

$y = -2x - 3$
$y = -2(2) - 3$
$y = -7$

$y = -2x - 3$
$y = -2(2) - 3$
$y = -2(-2) - 3$
$y = 4 - 3$
$y = 1$

Con esos dos puntos es posible realizar la gráfica.



Observando las gráficas se puede ver que las rectas cruzan el eje de las ordenadas en el punto señalado por b, esto es, en el eje vertical donde las ordenadas son negativas y que el ángulo formado por las rectas con el eje de las abscisas es mayor de 90° y menor de 180°.

FAMILIA DE RECTAS DE LA FORMA y = mx + b

Corresponde a la sesión de GA 3.30 ¡VAYA FAMILIAS!

En las sesiones anteriores se vio la construcción de gráficas de ecuaciones de la forma $y = mx + b$ (ecuaciones lineales o de primer grado). Recordarás que toda ecuación lineal o de primer grado con dos variables tiene por gráfica una línea recta.

En esta ocasión se verán dos casos particulares del comportamiento de una familia de gráficas de la forma y = mx + b; cuando las gráficas que se obtienen son líneas paralelas entre sí o cuando corresponden a líneas que se cortan.

Véase el siguiente ejemplo que corresponde a una familia de rectas (forma y = mx + b)

$$1.\quad \left\{\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 2 \\ y = 2x + 4 \end{array}\right.$$

Para construir su gráfica es necesario dar valores a x y encontrar los valores correspondientes a y, como sigue:

y = 2x – 1

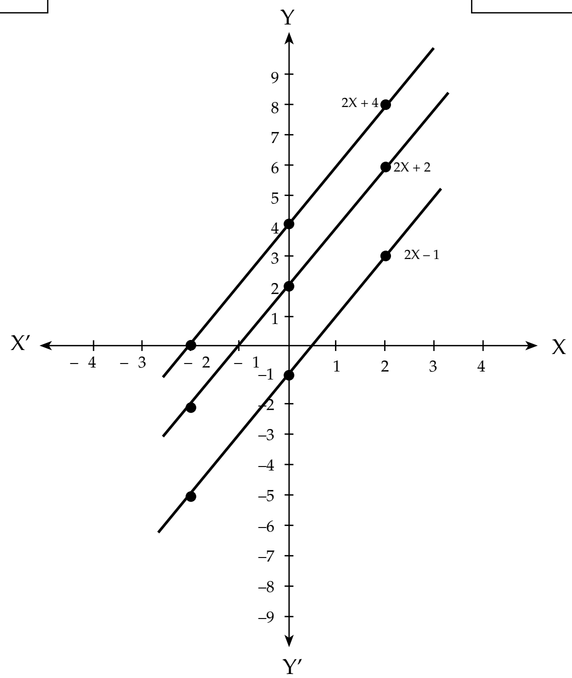
x	y
–4	–9
–2	–5
0	–1
2	3

y = 2x + 2

x	y
–4	–6
–2	–2
0	+2
2	6

y = 2x + 4

x	y
–4	–4
–2	0
0	4
2	8



TS/AA/CB/3/V.1/P-177-292.PM7.0 244 4/10/03, 12:22 PM

Se observa que las gráficas de esta familia de rectas son paralelas entre sí, ¿y, en qué coinciden las tres? Si te fijas en la variable independiente x, aparece en las tres ecuaciones el mismo valor del coeficiente (m = 2). Esto significa que cuando se tiene una familia de rectas correspondientes a las funciones de la forma y = mx + b y el coeficiente de la variable independiente tiene el mismo valor, las líneas que representan estas funciones serán paralelas entre sí.

Ahora considérese el siguiente ejemplo:

$$2. \quad \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 4x - 3 \\ y = 6x - 3 \end{cases}$$

Primero se asigna un valor a x, para encontrar los correspondientes de -y, y así poder construir sus gráficas.

$y = 2x - 3$

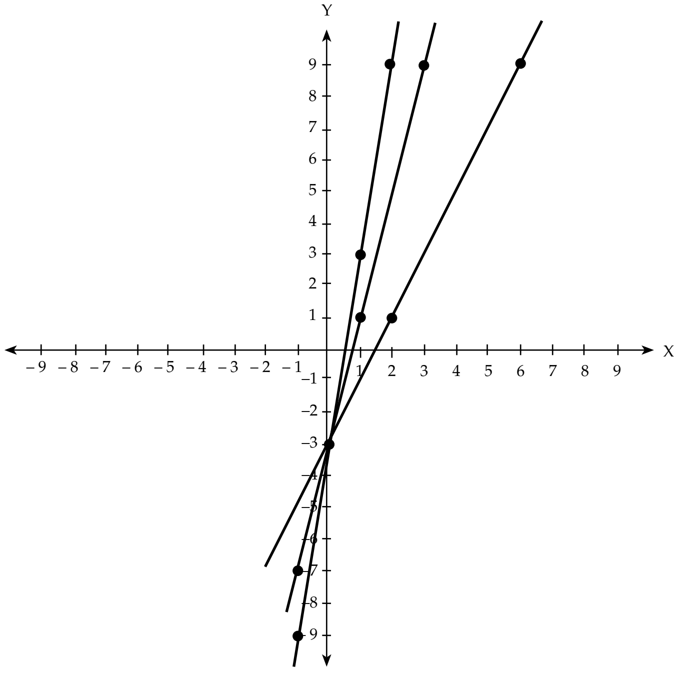
x	y
–3	–9
0	–3
2	1
6	9

$y = 4x - 3$

x	y
-1	–7
0	–3
1	1
3	9

$y = 6x - 3$

x	y
-1	–9
0	–3
1	3
2	9



Ahora se observa un comportamiento diferente en estas gráficas, ya que se cortan o intersectan en un punto determinado. ¿Qué las hace tener ese punto en común?; efectivamente, el término b tiene un valor constante en las tres ecuaciones (b = –3). Esto quiere decir que cuando en la familia de rectas de la forma y = mx + b se tiene un mismo valor para b, las rectas que se obtienen se cortan en ese punto.

De acuerdo con los ejemplos anteriores se puede concluir que el comportamiento de una familia de gráficas que corresponda a la forma y = mx + b, se resume de la forma siguiente:

1 . Cuando la variable independiente x tenga un coeficiente constante (m), las rectas que se obtienen en la gráfica serán siempre paralelas entre sí.

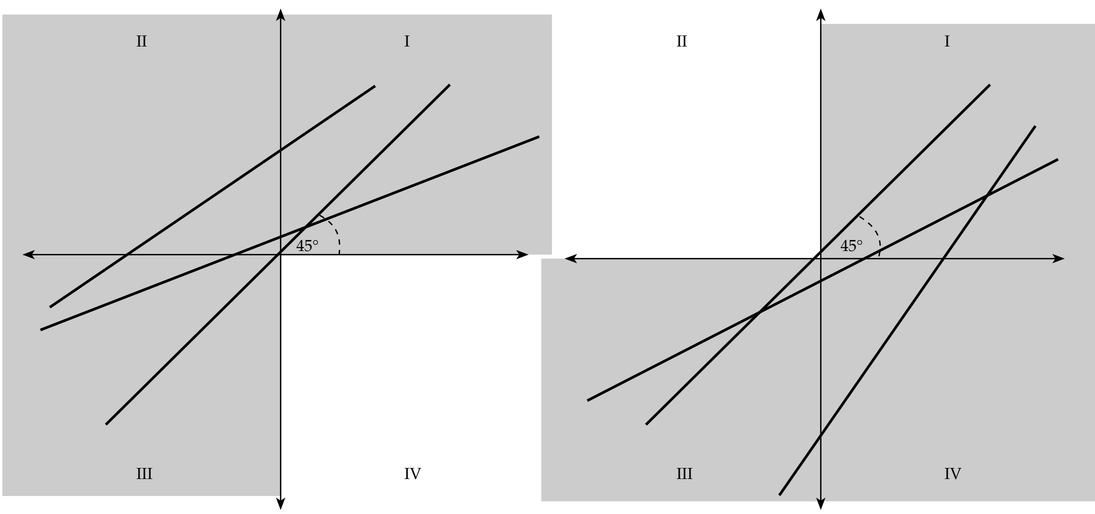
2. Cuando el término independiente b tenga un valor constante, las rectas que se obtendrán en la gráfica se cortarán en un punto.

ANÁLISIS DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES LINEALES

Corresponde a la sesión de GA 3.31 UNA FUNCIÓN EN CUATRO ACTOS

El análisis de las gráficas de las funciones lineales consiste en ver las características comunes que éstas presentan. A continuación se verán algunas de ellas.

1. **Funciones de la forma y = mx + b** y **y = mx – b**



Obsérvese que la región sombreada representa el espacio que ocuparían las gráficas de cada una de las dos funciones, respectivamente. Cuando “m” es positiva se tienen las siguientes características:

a) Cuando la ordenada al origen **b** toma el valor de cero, y **m** el valor de uno, la recta que resulta de graficar la función forma un ángulo de 45^{o} con respecto al eje de las abscisas.

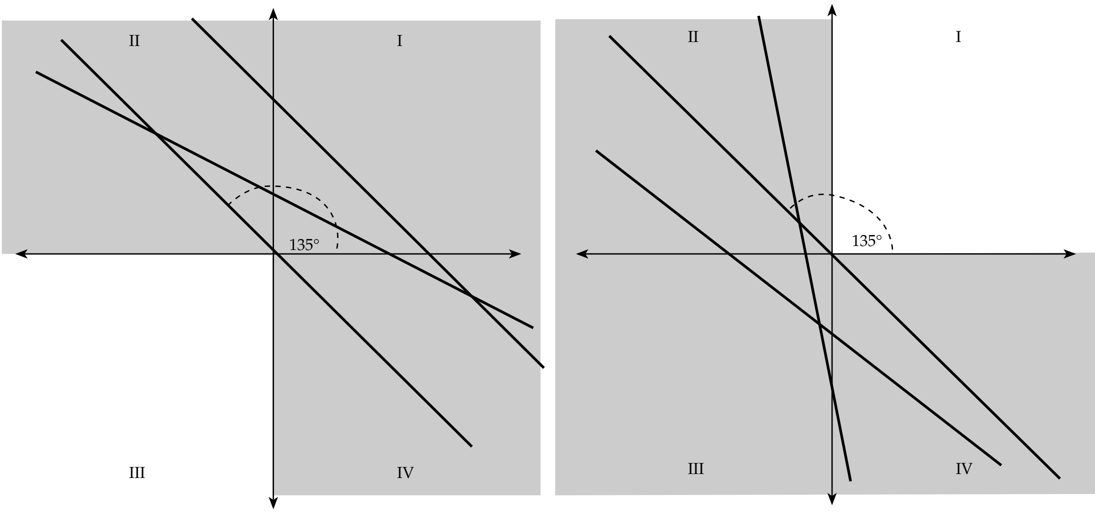
b) Los ángulos que forman las rectas que resultan de graficar cualquiera de las dos funciones y = mx + b, y = mx – b están comprendidos entre 0^{o} y 90^{o} con respecto al eje de las abscisas.

c) En la función y= mx + b, la ordenada al origen **b** es positiva, lo cual indica que las rectas intersecan al eje vertical en donde las ordenadas son positivas.

d) En la función y= mx – b, la ordenada al origen **b** es negativa, aquí las rectas intersecan al eje vertical donde las ordenadas son negativas.

e) Cuando la ordenada al origen **b** es positiva, las gráficas de las funciones no aparecen en el IV cuadrante; mientras que cuando es negativa, las gráficas de las funciones no aparecen en el II cuadrante.

2. **Funciones de la forma y = – mx + b** y **y = – mx – b**



Las características que presentan las funciones y=–mx + b y y=mx – b, cuando **m** es negativa son las siguientes:

a) Cuando la ordenada al origen **b** toma el valor de cero, y **m** tiene un valor de –1, la recta que resulta de la gráfica forma un ángulo de 135° con respecto al eje de las abscisas.

b) Los ángulos que forman las rectas que resultan de graficar cualquiera de las dos funciones $y = mx + b$, $y = -mx - b$ están comprendidos entre 90° y 180° con respecto al eje de las abscisas.

c) En la función $y = -mx - b$ la ordenada al origen **b** es negativa, esto indica que las rectas intersecan al eje vertical en donde las ordenadas son negativas.

d) Cuando la ordenada al origen **b** es positiva, las gráficas de las funciones no aparecen en el III cuadrante, mientras que cuando es negativa, las gráficas de las funciones no aparecen en el I cuadrante.

Con base en lo anterior se concluye que:

Si en una función de la forma $y = mx + b$, **m** es positiva y **b** positiva o negativa, la gráfica de la función formará ángulos menores o iguales que 90° con respecto al eje de las abscisas.

Si en una función de la forma $y = mx + b$, **m** es negativa y **b** positiva o negativa, la gráfica de la función formará ángulos comprendidos entre 90° y 180° con respecto al eje de las abscisas.

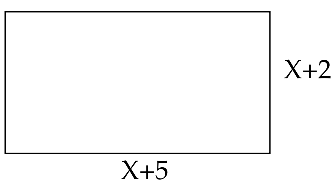
El valor que tenga **b** indicará el punto del eje de las ordenadas en donde la recta lo intersecará.

GRÁFICA DE FUNCIONES DE 2o. GRADO DE LA FORMA $y = x^2 + a$

Corresponde a la sesión de GA 3.32 CURVAS SOBRE LA Y

Si los lados de un rectángulo están expresados en forma algebraica, su área se obtiene utilizando la multiplicación de monomios o polinomios.

Por ejemplo:



Para obtener su área se multiplica la base por la altura.

$$A = (x + 5)\,(x + 2)$$
$$A = x^2 + 7x + 10$$

La fórmula anterior representa una función y la regla que la define

$$y = x^2 + 7x + 10$$

Una función cuya variable independiente es de segundo grado se llama función cuadrática y generalmente se escribe en la forma $y = ax^2 + bx + c$, con $a = 0$, en donde **a**, **b** y **c** son constantes.

Obsérvese que la única restricción sobre las constantes **a**, **b** y **c** es que $a \neq 0$. Por tanto, **b** y **c** pueden ser cero.

Si la constante **b** es igual a cero, el término de primer grado (bx) se elimina, quedando:

$$y = ax^2 + c$$

Si $a = 1$ y la constante **c** se representa con la letra **a** se tiene:

$$\boxed{y = x^2 + a}$$

variable dependiente — variable independiente — constante

Para determinar una función de la forma $y = x^2 + a$ es necesario determinar el valor de **a**, supóngase que en este caso tiene el siguiente valor:

Si $a = 3$ se tiene la función $y = x^2 + 3$

Para graficarla se realiza en la siguiente página la tabulación de la función, asignando arbitrariamente valores a su variable **x** y obteniendo los correspondientes de **y**.

$$y = x^2 + 3$$

Si $x = -2$, $y = (-2^2) + 3 = 4 + 3 = 7$

Si $x = -1$, $y = (-1^2) + 3 = 1 + 3 = 4$

Si $x = 0$, $y = (0^2) + 3 = 0 + 3 = 3$

Si $x = 1$, $y = (1^2) + 3 = 1 + 3 = 4$

Si $x = 2$, $y = (2^2) + 3 = 4 + 3 = 7$

x	**y**
–2	7
–1	4
0	3
1	4
2	7

Parejas

(–2, 7)

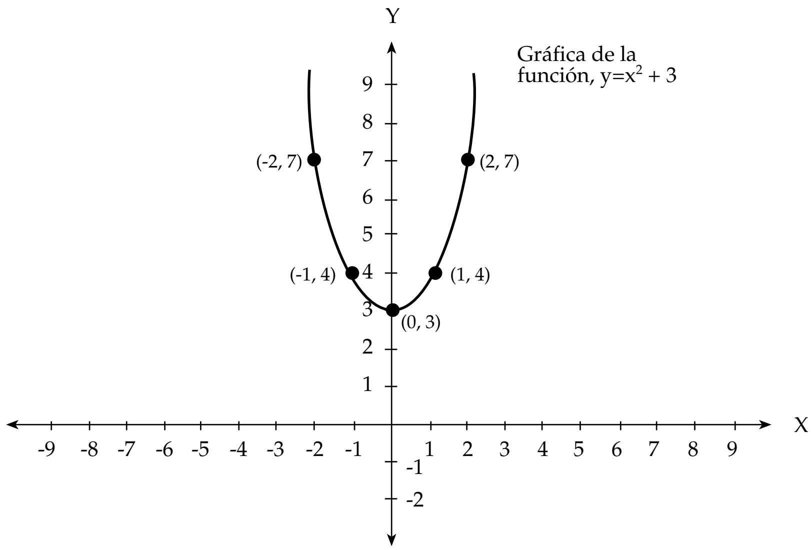
(–1, 4)

(0, 3)

(1, 4)

(2, 7)

Posteriormente se representan en el plano cartesiano los pares ordenados (x, y), que permitirán, al trazar una curva continua que pase por ellos, obtener la gráfica de la función.



La curva que representa esta función recibe el nombre de parábola, es simétrica respecto a un eje, que en este caso coincide con el eje OY. La intersección del eje de la parábola con la curva se llama vértice (V).

Otro ejemplo de gráfica de la forma $y = x^2 + a$ es cuando $a = 1$ se tiene:

$$y = x^2 + 1$$

Para determinar los pares (x, y) se realiza la siguiente tabulación.

$y = x^2 + 1$

Si x= 3, $y = (3^2) + 1 = 9 + 1 = 10$

Si x = 2, $y = (2^2) + 1 = 4 + 1 = 5$

Si x = 0, $y = (0^2) + 1 = 0 + 1 = 1$

Si x = –2, $y = (-2^2) + 1 = 4 + 1 = 5$

Si x = –3, $y = (-3^2) + 1 = 9 + 1 = 10$

x	y
3	10
2	5
0	1
–2	5
–3	10

Parejas

(3, 10)

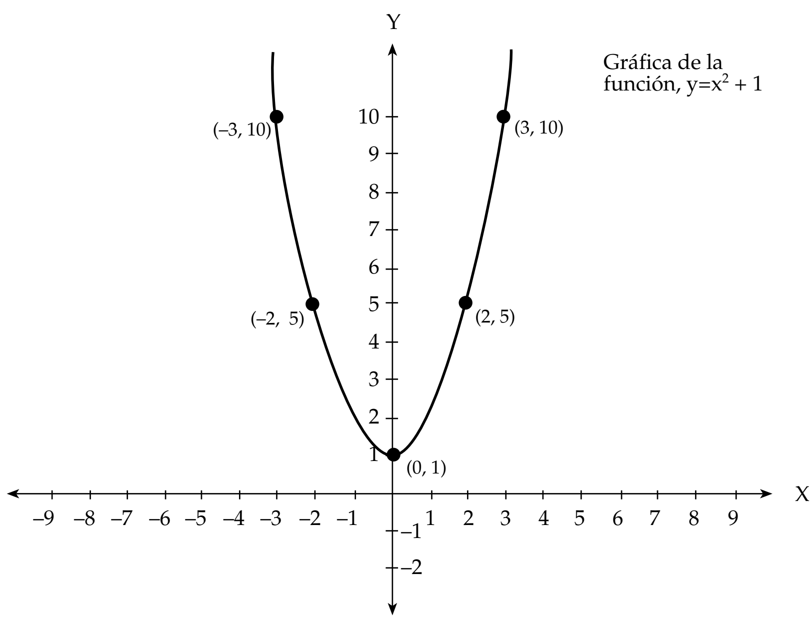
(2 , 5)

(0, 1)

(–2, 5)

(–3, 10)

Se obtiene la gráfica localizando en el plano cartesiano los pares ordenados (x, y) y trazando una curva continua que pase por ellos.



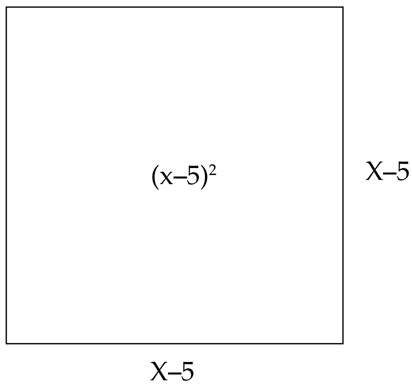
El vértice de la parábola (V) es el punto cuyas coordenadas son (0, 1). Al comparar ésta y la anterior gráfica se puede afirmar que en una función de la forma $y = x^2 + a$ el valor de **a** determina el vértice de la parábola sobre el eje de las ordenadas.

GRÁFICA DE FUNCIONES DE LA FORMA $y = (x - a)^2$

Corresponde a la sesión de GA 3.33 CURVAS SOBRE LA X

Para calcular el área de un cuadrado, basta con elevar al cuadrado la medida de uno de sus lados.

Por ejemplo:

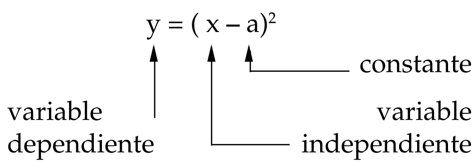


Si uno de sus lados es $x - 5$ entonces $A = (x - 5)\ (x - 5)$ o también:

$$A = (x - 5)^2$$

La fórmula representa una función, cuya regla es $y = (x - 5)^2$

La función $y = (x - 5)^2$ es de la forma $y = (x - a)^2$



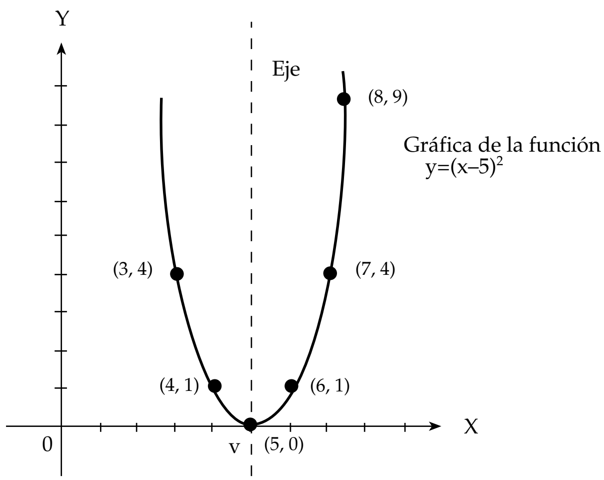
Dado que $(x - a)^2$ es un binomio con exponente dos, las funciones con esa forma se llaman de segundo grado o funciones cuadráticas.

Para graficarla primero se realiza la tabulación de la función, asignando arbitrariamente valores a su variable **x** y obteniendo los correspondientes valores de **y**.

$y = (x - 5)^2$

		x	y	Parejas
Si x= 3,	$y = (3 - 5)^2 = (-2)^2 = 4$	3	4	(3, 4)
Si x = 4,	$y = (4 - 5)^2 = (-1)^2 = 1$	4	1	(4, 1)
Si x = 5,	$y = (5 - 5)^2 = (0)^2 = 0$	5	0	(5, 0)
Si x = 6,	$y = (6 - 5)^2 = (1)^2 = 1$	6	1	(6, 1)
Si x = 7,	$y = (7 - 5)^2 = (2)^2 = 4$	7	4	(7, 4)

Al representar los pares (x, y) en el plano cartesiano se obtiene la gráfica de la función.



La curva que representa esta función recibe el nombre de parábola, es simétrica respecto a una paralela al eje OY, que se llama el eje de la parábola. En este caso el punto V de intersección del eje con la parábola es el vértice.

Si se toma cualquier punto de la curva, por ejemplo (8,9) y se sustituyen sus coordenadas en la función, se tiene:

$$y = (x - 5)^2$$
$$9 = (8 - 5)^2$$
$$9 = 3^2$$
$$9 = 9$$

Por tanto, todo punto sobre la curva satisface la función.

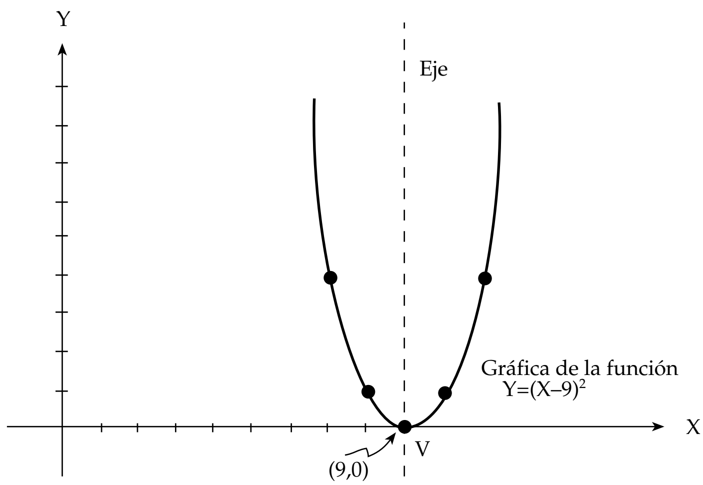
Otro ejemplo de gráfica de la forma $y = (x - a)^2$ es para cuando $a = 9$ se tiene:

$$y = (x - 9)^2$$

Para obtener los pares (x, y) se realiza la siguiente tabulación:

	x	y	
Si $x = 7$, $y = (7 - 9)^2 = (-2)^2 = 4$	7	4	(7, 4)
Si $x = 8$, $y = (8 - 9)^2 = (-1)^2 = 1$	8	1	(8, 1)
Si $x = 9$, $y = (9 - 9)^2 = (0)^2 = 0$	9	0	(9, 0)
Si $x = 10$, $y = (10 - 9)^2 = (1)^2 = 1$	10	1	(10, 1)
Si $x = 11$, $y = (11 - 9)^2 = (2)^2 = 4$	11	4	(11, 4)

Los pares de números obtenidos son las coordenadas de los puntos que, al trazar una curva continua que pase por ellos, nos dan la gráfica buscada.



El vértice de la parábola (V) es el punto cuyas coordenadas son (9,0). Al comparar ésta y la anterior gráfica se puede afirmar que en una función de la forma $y = (x - a)^2$, el valor de **a** determina el vértice de la parábola sobre el eje de las abscisas.

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $y = \frac{1}{x}$

Corresponde a la sesión de GA 3.34 ACERCAMIENTOS PELIGROSOS

Toda función se puede graficar; asimismo, existe una característica similar en las gráficas de funciones de segundo grado: el hecho de representarse con una curva. Pero también hay características diferentes. En seguida se verán las características de la gráfica de la función

$$y = \frac{1}{x}$$

En la expresión $y = \frac{1}{x}$ la variable independiente es **x** y la variable dependiente es **y**.

Para graficar esta función se necesita tener valores para **x** y valores para **y**, estos valores determinan las coordenadas de los puntos de la gráfica correspondiente.

Obsérvese la siguiente tabla y las operaciones efectuadas para obtener los valores de **y**.

$$y = \frac{1}{x}$$

S I M E T R I C O S

x	y	coordenadas (x, y)
–2	–0.5	(–2, –0.5)
–1.5	–0.66	(–1.5, –0.66)
–1	–1	(–1, –1)
–0.5	–2	(–0.5, –2)
0.5	2	(0.5, 2)
1	1	(1, 1)
1.5	0.66	(1.5, 0.66)
2	0.5	(2, 0.5)

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{(-2)} = -0.5$$

$$y = \frac{1}{(-1.5)} = -0.66$$

$$y = \frac{1}{(-1)} = -1$$

$$y = \frac{1}{(-0.5)} = -2$$

$$y = \frac{1}{(0.5)} = 2$$

$$y = \frac{1}{(1)} = 1$$

$$y = \frac{1}{(1.5)} = 0.66$$

$$y = \frac{1}{(2)} = 0.5$$

El valor de **x** no debe ser cero, pues la división entre cero no está definida $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{0}}$

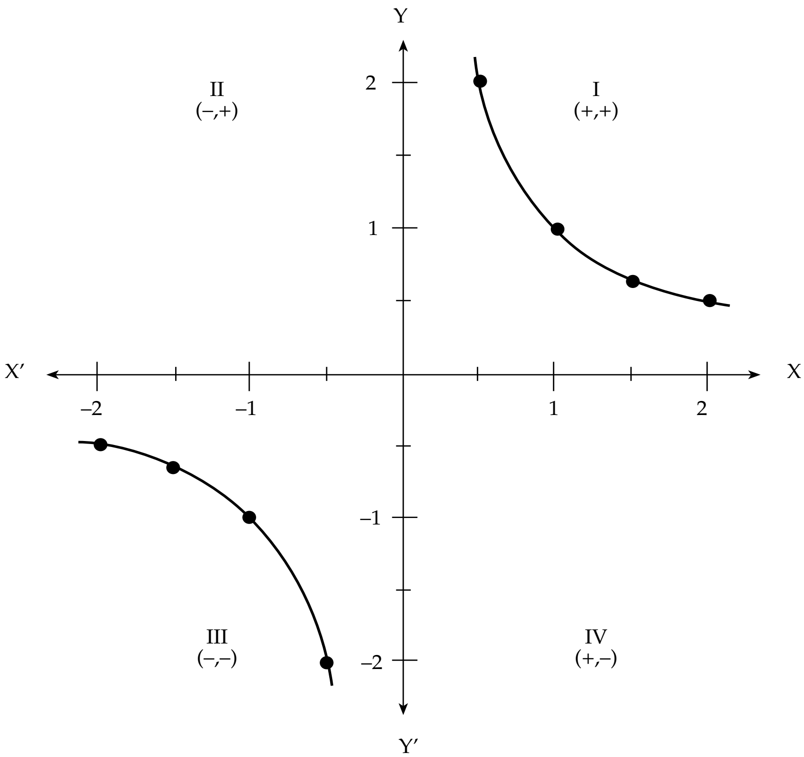
Nótese que cuando los valores de **x** son simétricos, su función o valor de **y** también lo es. Por ejemplo:

simétricos

x	y
–2	–0.5
2	0.5

simétricos

Con las coordenadas de los puntos formados por los pares ordenados (x, y) se puede graficar la función $y = \frac{1}{x}$ localizando los puntos en el plano cartesiano y uniéndolos con una línea.



En la tabla y en la gráfica puede observarse que si el valor de **x** disminuye, el valor de **y** aumenta, o viceversa; portal motivo, la función $\mathbf{y} = \frac{1}{x}$ es una **función inversa**.

La gráfica de la función la forman dos líneas curvas, una ubicada en el cuadrante I, cuyas coordenadas son positivas (+, +), y otra ubicada en el cuadrante III, cuyas coordenadas son negativas (–, –). Asimismo, puede notarse que las curvas se acercan cada vez más a los ejes.

A este tipo de gráfica se le denomina hipérbola.

La hipérbola es la curva que consta de dos ramas simétricas respecto de dos ejes perpendiculares entre sí (ejes coordenados).

Por lo tanto, puede concluirse que la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$ es una hipérbola cuyas ramas se encuentran: una, en el cuadrante I y otra en el cuadrante III.

La siguiente tabla representa una función inversa. En ella se representan las dimensiones que debe tener un rectángulo para que su área sea igual a 12 cm².

base (b)	altura (h)
1	12
2	6
3	4
4	3
6	2
12	1

$h = \frac{12}{b}$

$h = \frac{12}{1} = 12$

$h = \frac{12}{2} = 6$

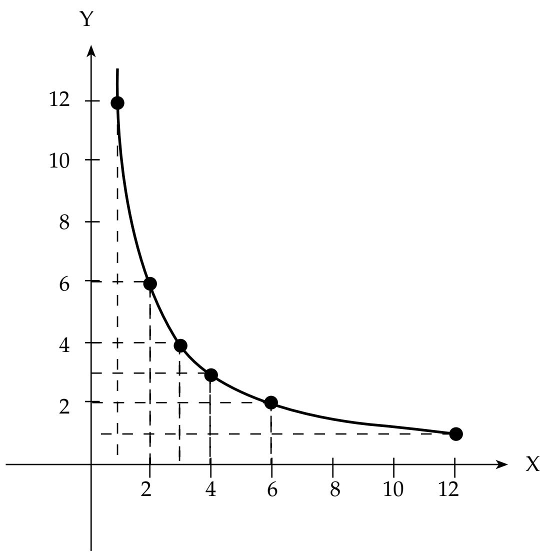
$h = \frac{12}{3} = 4$

$h = \frac{12}{4} = 3$

$h = \frac{12}{6} = 2$

$h = \frac{12}{12} = 1$

Véase ahora su representación gráfica.



Tanto en la tabla como en la gráfica puede notarse que: si la base **aumenta,** entonces la altura **disminuye**, y viceversa: si la base **disminuye,** entonces la altura **aumenta.**

Además, la gráfica de la función también es una hipérbola que se aproxima más y más a los ejes perpendiculares.

DESIGUALDADES LINEALES

Corresponde a la sesión de GA 3.35 PUROS PUNTOS

Hasta el momento se han estudiado expresiones algebraicas cuya relación se expresa con una igualdad y sus gráficas pueden ser rectas o curvas. En el plano cartesiano también puede localizarse otro tipo de relaciones expresadas algebraicamente; este tipo de relaciones son llamadas desigualdades lineales, debido a que la gráfica que se obtiene de ellas puede ser una línea recta continua o discontinua, y una región de puntos que quedan sobre (al ras), por arriba o por abajo de dicha línea recta.

Como se recordará, una desigualdad es una expresión que indica que una cantidad puede ser mayor (>), menor (<), mayor o igual (≥),o menor o igual (≤), que otra cantidad.

Obsérvense las siguientes desigualdades:

a) $x < -2$, esta desigualdad se lee: “equis es menor que menos dos”, algunos valores que puede tener **x** son: –3, –4, –5, -6, ...; ya que $-3 < -2$,$-4 < -2$, $-5 < -2$, $-6 < -2$, como se observa, x no forma el valor de –2, sino de aquellos que son menores que él, debido a que se tiene la desigualdad (<).

b) $x \leq -2$, esta desigualdad se lee: “equis es menor o igual que menos dos”; algunos valores que puede tomar **x** son: –2, –3, –4, –5, –6, ...; ya que $-2 \leq -2$, $-3 \leq -2$, $-4 \leq -2$, $-5 \leq -2$, $-6 \leq -2$, como se observa, los valores que toma x son aquellos iguales o menores que -2, debido a que se tiene la desigualdad (≤).

c) $y > 3$, esta desigualdad se lee: “ye es mayor que tres”, esto indica que **y** toma valores mayores que 3, esto es: 4, 5, 6, 7...

d) $y \geq 3$, esta desigualdad se lee: “ye es mayor o igual que tres”, aquí **y** toma valores a partir de 3, esto es: 3, 4, 5, 6, 7...

Ahora se verá la forma de graficar desigualdades con las que se comparen las variables **x** y **y** con las desigualdades $>$, $<$, $\geq$ o $\leq$.

Graficar la desigualdad **x** $<$ **y**

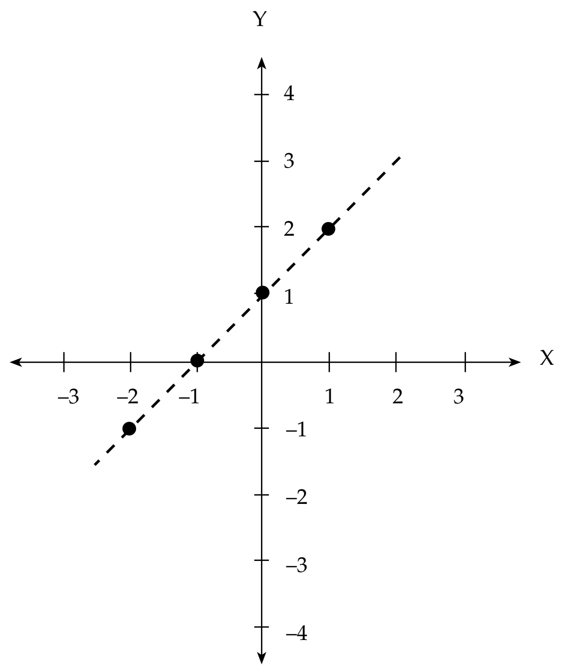
Para realizar la tabulación se asignan valores a **x**, para determinar los de **y** se debe cumplir la desigualdad, por lo que la tabulación queda así:

x	y	puntos
–2	–1	(–2, –1)
–1	0	(–1, 0)
0	1	(0,1)
1	2	(1, 2)

Cuando x = –2, **y** debe tener un valor mayor que el de **x**, entonces:

Si x = –2, y =–1
Si x = –1, y = 0
Si x = 0, y = 1
Si x = 1, y = 2

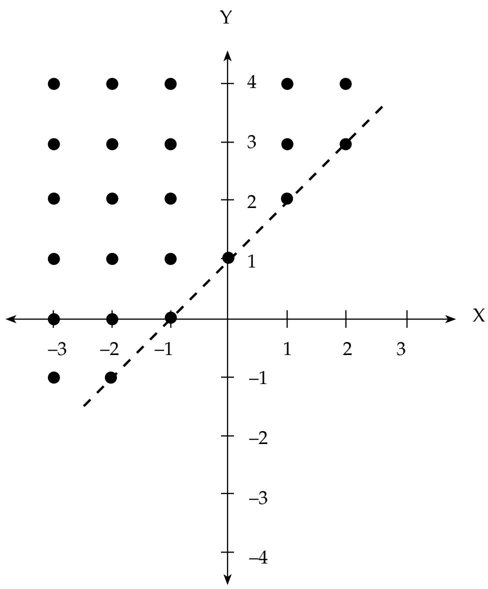
Se localizan los puntos en el plano cartesiano y se unen mediante una línea recta discontinua, ya que es la forma general de graficar una desigualdad de la forma $>$ o $<$.



Para determinar la región de puntos que satisfacen a la desigualdad **x** < **y**, cuando se tengan las dos variables, siempre se despeja la variable **y**, en este caso se considera que ya está despejada, ahora la desigualdad se lee comenzando por **y**, lo cual queda: “ye es mayor que equis”, esta desigualdad también se puede escribir de la forma como se leyó, esto es:

$$y > x$$

Como la desigualdad que se tiene es mayor que (>), esto indica que los puntos que hacen verdadera a dicha desigualdad son todos aquellos que quedan sobre y arriba de la recta, si la desigualdad hubiera sido **y** < **x**, la región de puntos quedaría abajo de la recta, por lo que la gráfica queda así:



Si se eligen los puntos, A y B, que pertenecen a la región que satisface a la desigualdad, si el punto A tiene por coordenadas (–2, 2) y el punto B (1, 3), se procederá a comprobar la desigualdad **x** < **y,** sustituyendo los valores de los pares ordenados en ella, entonces se tiene:

Si las coordenadas del punto A son (–2, 2), entonces:

Si $x = -2$, $y = 2$, la desigualdad queda
$x < y$
$-2 < 2$

Si las coordenadas del punto B son (1, 3), entonces:

Si $x = 1$, $y = 3$, la desigualdad queda:
$x < y$
$1 < 3$

Como se observa, las coordenadas de los puntos A y B que se eligieron al azar satisfacen la desigualdad inicial y lo mismo sucedería si se toman las coordenadas de cualquier otro punto que se encuentre sobre y por arriba de la recta discontinua.

Graficar la desigualdad $x \geq y$

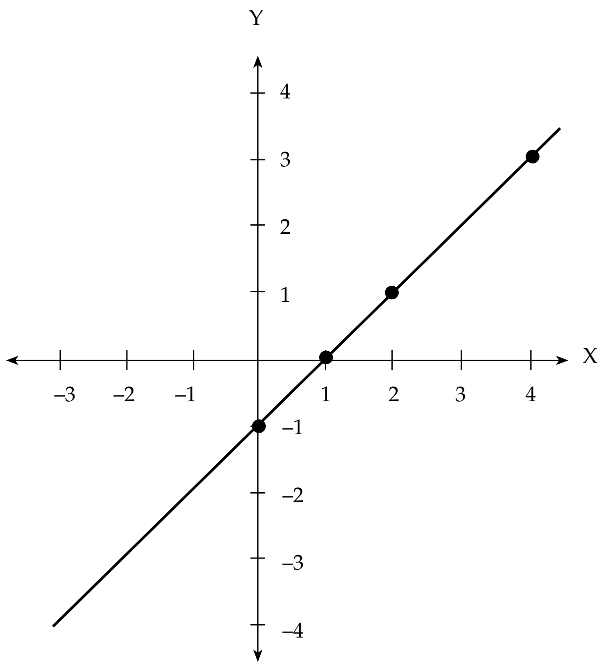
Nuevamente, para efectos de la tabulación, **x** toma cualquier valor, mientras que **y** debe tomar valores que satisfagan a la desigualdad, con lo que la tabulación queda así:

x	y	puntos
4	3	(4, 3)
2	1	(2, 1)
1	0	(1, 0)
0	–1	(0, –1)

Cuando x = 3, **y** debe tomar un valor menor o igual que el de **x**, entonces:

Si x = 4, y = 3
Si x = 2, y = 1
Si x = 1, y = 0
Si x = 0, y = –1

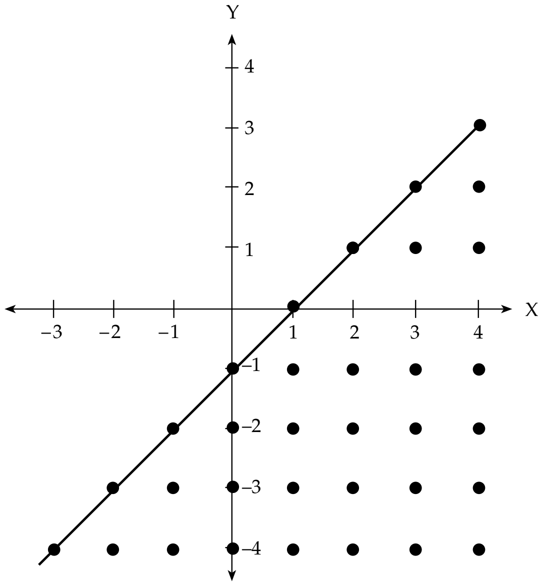
Se localizan los puntos en el plano cartesiano y se unen mediante una línea recta continua, ya que es la forma general que se utiliza para graficar una desigualdad de la forma ≥ o ≤.



Para determinar la región de puntos que satisfacen a la desigualdad $x \geq y$, se lee la desigualdad empezando por la variable **y**, lo cual se lee: "ye es menor o igual que equis", entonces la desigualdad se puede escribir así:

$$y \leq x$$

Como la desigualdad que se tiene es menor o igual ($\leq$), la región de puntos que la satisface queda sobre y debajo de la línea recta, lo cual se observa en la siguiente gráfica.



Si se eligen al azar los puntos C y D con sus respectivas coordenadas, se tiene C (4,–2) y D (3, 2) al sustituir las coordenadas de los puntos en la desigualdad $y \leq x$, se tiene que:

Para el punto C (4, –2)

Si $x = 4$, $y = -2$, la desigualdad queda:

$$y \leq x$$
$$-2 \leq 4$$

Para el punto D (3, 2)

Si $x= 3$, $y = 2$, la desigualdad queda:

$$y \leq x$$
$$2 \leq 3$$

Se observa que las coordenadas de ambos puntos satisfacen la desigualdad inicial; lo mismo sucedería si se toman las coordenadas de cualquier otro punto que esté sobre y debajo de la recta.

De lo anterior se tiene que:

Si las desigualdades son $>$ o $<$, la recta de la gráfica es discontinua, si son $\geq$ o $\leq$, la recta es continua.

Si las desigualdades son $>$ o $\geq$ con respecto a **y**, la región de puntos que satisfacen la desigualdad queda arriba o sobre la recta y arriba de ella, respectivamente.

Si las desigualdades son $<$ o $\leq$ con respecto a **y**, la región de puntos que satisfacen la desigualdad queda abajo o sobre la recta y abajo de ella, respectivamente.

DESIGUALDADES CON UNA VARIABLE

Corresponde a la sesión de GA 3.36 PUNTOS Y RAYAS

Hay varios tipos de desigualdades; existen aquellas que tienen una variable y se comparan con cero; asimismo, están aquellas que tienen dos variables, y también se comparan con cero.

Aquí se verán aquellas que tienen una variable, la cual se compara con cero; para ello, observen los siguientes ejemplos:

1. Graficar la desigualdad $2x - 6 \geq 0$

Para tabular una desigualdad, deberá considerarse como una igualdad, por lo que el signo mayor o igual que (≥) se cambia por el signo de igual y se deja la variable, aplicando las propiedades de la igualdad:

$$
\begin{aligned}
2x - 6 &= 0 \\
2x &= 6 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Esto indica que **x** tendrá el valor de 3, mientras que **y** puede tomar cualquier valor, por lo que la tabulación queda:

x	**y**	**puntos**
3	1	(3, 1)
3	2	(3, 2)

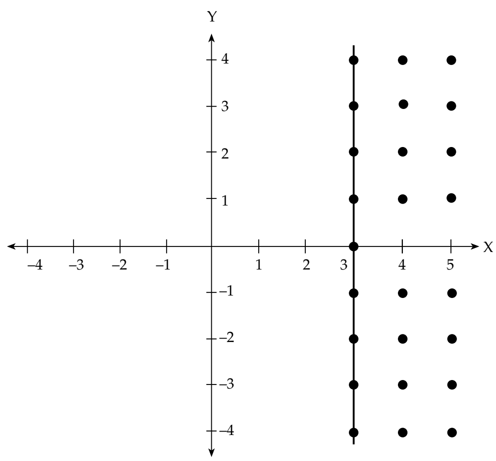
En la igualdad x = 3, el signo igual se cambia por el de la desigualdad inicial, en este caso mayor o igual que (≥) con lo que se tiene:

$$x \geq 3$$

De aquí se observa que los valores que puede tomar **x** son: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etcétera.

Esta desigualdad se lee: "equis es mayor o igual que tres", la región de puntos que satisfacen la desigualdad queda a la derecha de la recta, debido a que la desigualdad es ≥ , en caso de que ésta fuera ≤ la región de puntos quedaría a la izquierda de la recta.

La gráfica de la desigualdad es:



Observen por ejemplo los puntos A y B, que pertenecen a la región y cuyas coordenadas son: A (4, 1) y B (5, –3), al sustituir estas coordenadas en la desigualdad $x \geq 3$, ésta se puede comprobar.

Por ejemplo, los puntos A y B que pertenecen a la región que satisface a la desigualdad, tienen los valores para x de 4 y 5; al sustituirlos en la desigualdad original se tiene lo siguiente:

Cuando $x = 4$, entonces:

$$\begin{array}{rrr} 2x & -\ 6 & \geq 0 \\ 2(4) & -\ 6 & \geq 0 \\ 8 & -\ 6 & \geq 0 \\ & 2 & \geq 0 \end{array}$$

Cuando $x = 5$, entonces:

$$\begin{array}{rrr} 2x & -\ 6 & \geq 0 \\ 2(5) & -\ 6 & \geq 0 \\ 10 & -\ 6 & \geq 0 \\ & 4 & \geq 0 \end{array}$$

Ambas desigualdades se cumplen con los valores señalados, la primera de ellas se lee: “dos es mayor o igual que cero” y la segunda: “cuatro es mayor o igual que cero”, de lo cual se observa que cualquier número positivo siempre es mayor que cero.

2. Graficar $3y - 9 \leq 0$

Para obtener la tabulación, la desigualdad se maneja como una igualdad y se despeja la variable.

$$\begin{array}{rrl} 3y & -9 & =0 \\ 3y & & =9 \\ y & & =3 \end{array}$$

El signo de la igualdad se cambia por el de la desigualdad original, por lo que queda:

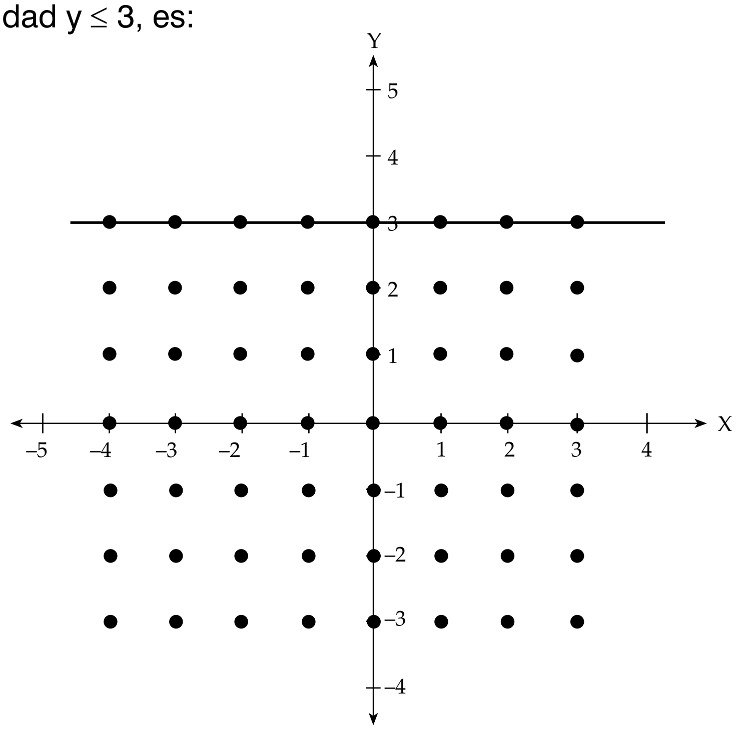
$$y \leq 3$$

De aquí se observa que los valores que puede tomar **y** son: 3, 2, 1, 0, etcétera.

Esto indica que **y** siempre tendrá el valor de 3, mientras que **x** tomará cualquier valor, en este caso se le asignarán los valores de 4 y 3, por lo que la tabulación queda:

x	y	puntos
4	3	(4, 3)
3	3	(3, 3)

Como la desigualdad es $y \leq 3$, esto indica que la región de puntos que la satisfacen queda sobre y bajo la recta, en caso de que la desigualdad fuera $\geq$, la región de puntos quedaría sobre y arriba de la recta, entonces la gráfica de la desigualdad $y \leq 3$, es:



Para comprobar la desigualdad original se sustituyen en ella algunos valores que toma **y** en cualquiera de los puntos pertenecientes a la región. Por los puntos C (–2, 3) y D (3, –1). Si se sustituyen los valores cuando y= 3 y y= –1, se tiene:

Cuando y = 3, entonces:	Cuando y = –1, entonces:
$3y - 9 \leq 0$	$3y - 9 \leq 0$
$3(3) - 9 \leq 0$	$3(-1) - 9 \leq 0$
$9 - 9 \leq 0$	$-3 - 9 \leq 0$
$0 \leq 0$	$-12 \leq 0$

Como se observa, ambas desigualdades se cumplen, ya que todo número negativo siempre es mayor que cero.

Con base en lo anterior, se deduce que:

En una desigualdad que tiene a la variable **x**, si se le compara con cero, su gráfica siempre es una recta paralela al eje de las ordenadas y la región de puntos quedara a la izquierda, a la derecha y sobre la recta, dependiendo del signo de la desigualdad.

Cuando en la desigualdad se tiene a la variable **y** y el término independiente comparado con cero, su gráfica siempre es una recta paralela al eje de las abscisas y la región de puntos quedará abajo, arriba y sobre la recta, dependiendo de la desigualdad que tenga.

DESIGUALDADES CON DOS VARIABLES

Corresponde a la sesión de GA 3.37 TODO TIENE UN LÍMITE

Finalmente, se verá la forma de graficar una desigualdad con dos variables y un término independiente que se compara con cero. En este caso, al despejar la variable (que siempre es **y**), se procede como se muestra en los siguientes ejemplos.

1. Graficar $2x + y \geq -1$

De nuevo se considera la desigualdad como una igualdad, por lo que el signo de mayor o igual que (≥), se cambia por el de igual, para obtener la tabulación, y se despeja **y**.

$$\begin{aligned} 2x + y &\geq -1 \\ 2x + y &= -1 \\ y &= -1 - 2x \end{aligned}$$

Se asignan dos valores cualesquiera a x para obtener los de y, por lo que la tabulación queda:

$y = -1 -2x$

x	y	puntos
–1	1	(–1, 1)
2	–5	(2, –5)

Cuando x = -1, entonces:

$$y = -1 -2x$$
$$y = -1 -2(-1)$$
$$y = -1 +2$$
$$y = 1$$

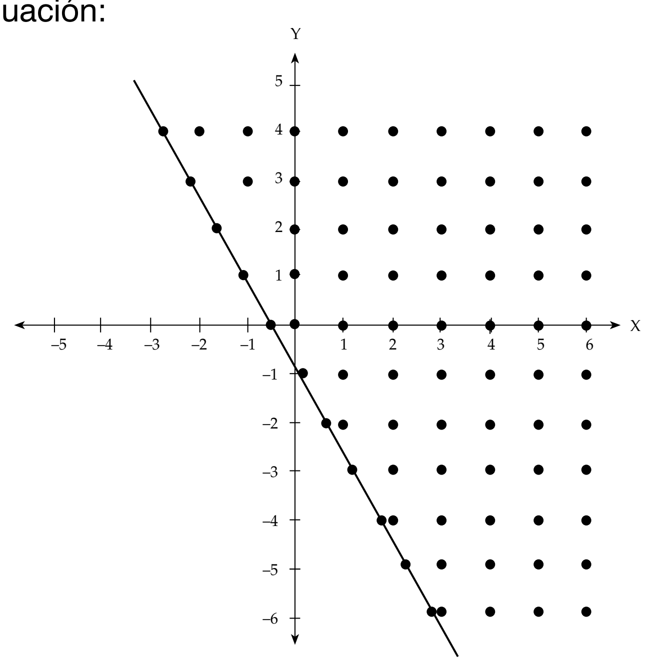
Cuando x = 2, entonces:

$$y = -1 -2x$$
$$y = -1 -2(2)$$
$$y = -1 -4$$
$$y = -5$$

Para determinar la región de puntos que satisfacen a la desigualdad original, en donde se despejó a **y**, se cambia el signo de la igualdad por el de la desigualdad, en este caso el de mayor o igual que, por lo que se tiene:

$$y \geq -1 -2x$$

Esta desigualdad se lee: “ye es mayor o igual que menos uno menos dos equis”, debido a que **y es mayor o igual que**; la región de puntos que satisfacen a la desigualdad queda sobre y arriba de la recta en la gráfica, lo cual se muestra a continuación:



Obsérvese que las coordenadas de algunos de los puntos de la región que satisfacen a la desigualdad son: (2, –3), (2, –2), (–1, 2), (–1, 3), etcétera.

Para comprobar que la desigualdad se cumple, se toman algunos puntos con sus respectivas coordenadas y se sustituyen en la desigualdad original.

Cuando el punto es (2, –3), entonces:

$$\begin{aligned} 2x + y &\geq -1 \\ 2(2) + (-3) &\geq -1 \\ 4 - 3 &\geq -1 \\ 1 &\geq -1 \end{aligned}$$

Cuando el punto es (2, –2), entonces:

$$\begin{aligned} 2x + y &\geq -1 \\ 2(2) + (-2) &\geq -1 \\ 4 - 2 &\geq -1 \\ 2 &\leq -1 \end{aligned}$$

De aquí se observa que ambas desigualdades son verdaderas, debido a que tanto 1 como 2 son mayores que –1.

2. Graficar $4x + 2y \leq 6$

La desigualdad se maneja como una igualdad y se despeja y.

$$\begin{aligned} 4x + 2y &\leq 6 \\ 4x + 2y &= 6 \\ 2y &= 6 - 4x \\ y &= \frac{6 - 4x}{2} \\ y &= 3 - 2x \end{aligned}$$

Se asignan dos valores cualesquiera a **x** para obtener los de **y**, por lo que la tabulación queda:

$y = 3 - 2x$

x	y	puntos
0	3	(0, 3)
3	–3	(3, –3)

Cuando x = 0, entonces:

$$\begin{aligned} y &= 3 - 2x \\ y &= 3 - 2(0) \\ y &= 3 \end{aligned}$$

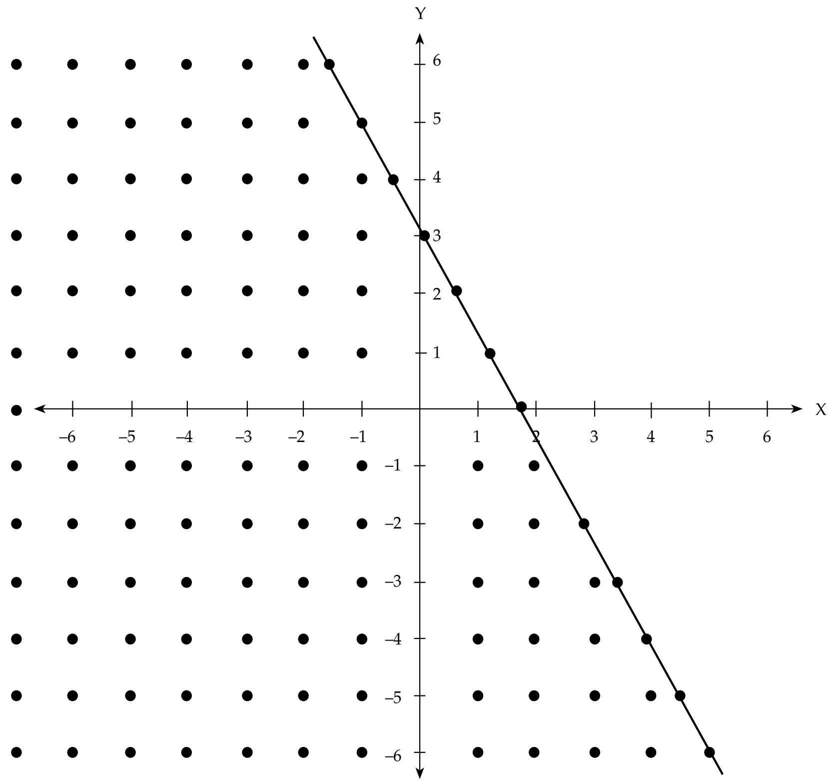
Cuando x = 3, entonces:

$$\begin{aligned} y &= 3 - 2x \\ y &= 3 - 2(3) \\ y &= 3 - 6 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Para determinar la región de puntos que satisfacen la desigualdad original, en donde se despejó **y** se cambia el signo de la igualdad por el de la desigualdad, en este caso mayor o igual que, con lo que se tiene:

$$y \leq 3 - 2x$$

Esta desigualdad se lee: **ye es menor o igual que tres menos dos equis,** debido a que **y es menor o igual que**, la región de puntos que satisfacen la desigualdad original queda abajo de la recta en la gráfica, lo cual se observa a continuación:



Las coordenadas de algunos de los puntos son: (1, 1), (–4, –5), (1,–4), (0, 2), (–6, 4), etc. Para comprobar la desigualdad original se sustituye cualquiera de estas coordenadas en ella.

Cuando el punto es (–4, –5) entonces:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &\leq 6 \\ 4(-4) + 2(-5) &\leq 6 \\ -16 - 10 &\leq 6 \\ -26 &\leq 6 \end{aligned}$$

Cuando el punto es (0, 2), entonces:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &\leq 6 \\ 4(0) + 2(2) &\leq 6 \\ 4 &\leq 6 \end{aligned}$$

De aquí se observa que tanto –26 como 4 son menores que 6.

Con base en lo anterior se deduce que:

Cuando se tiene una desigualdad con dos variables, siempre se obtiene una recta que no es paralela a ninguno de los ejes, para determinar la región de puntos que la satisfacen, basta observar a la variable y así como el signo de la desigualdad, si éste es mayor o igual que (≥), la región de puntos está arriba de la recta y si es menor o igual que (≤), la región de puntos está abajo de la recta.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE MONOMIOS

Corresponde a la sesión de GA 3.39 UNA REDUCCIÓN DE PESO

Para realizar la adición y sustracción de monomios es necesario recordar qué son los términos semejantes.

Un término algebraico consta de tres partes: literal, exponente y coeficiente, éste puede ser positivo o negativo.

coeficiente $\longrightarrow$ $3\,x^2$ exponente

literal

Adición

Si se desea encontrar la suma de 3a, –2b, 3c, $-\frac{1}{2}$a, 5c. La suma indicada quedaría como:

$$3a + (-2b) + 3c + (-\tfrac{1}{2}\,a) + 5c$$

como los términos $-2b$ y $-\frac{1}{2}$ a tienen signo negativo, se colocan dentro de un paréntesis. Para realizar la suma se deben localizar los términos semejantes. Pero, ¿cómo se identifican los términos semejantes en una expresión algebraica?

> Los términos semejantes son aquéllos cuyas literales y sus exponentes son iguales.

Entonces, ¿cuáles términos son semejantes en la expresión anterior?

$3a, -\frac{1}{2}a$	Son términos semejantes, pues la literal y su exponente es igual.
$3c,\ 5c$	Son términos semejantes.
$-2b$	No tiene término semejante, pues no existe otro con literal **b**

Ahora es posible realizar la adición:

$$3a + (-2b) + 3c + \left(-\frac{1}{2}a\right) + 5c = 2\frac{1}{2}a + 8c + (-2b)$$

Como se observa, para reducir términos semejantes basta sumar sus coeficientes y anotar la literal o literales con los mismos exponentes.

En esta adición se puede comprobar la igualdad entre el primero y el segundo miembro, sustituyendo las literales por valores numéricos:

Ejemplo:

Si $a = 2,\ b = 1$ y $c = -2$

se sustituyen los valores en el primer miembro:

$$3a + (-2b) + 3c + \left(-\frac{1}{2}a\right) + 5c =$$

$$3\,(2) + [-2\,(1)] + 3\,(-2) + \left[-\frac{1}{2}\,(2)\right] + 5\,(-2) =$$

$$6 + (-2) + (-6) + (-1) + (-10) = 6 + (-19) = -13$$

y sustituyendo en el segundo miembro:

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{2}\,(a) + 8\,(c) + (-2b) &= \\ 2\frac{1}{2}\,(2) + 8\,(-2) + [-2\,(1)] &= 5 + (-16) + (-2) \\ &= 5 + (-18) \\ &= -13 \end{aligned}$$

Se observa que, al sustituir las literales por los valores asignados, el resultado es igual en ambos miembros, con lo que se puede comprobar la igualdad existente en ambos.

Véase los ejemplos siguientes:

1) $3a^2b + 2ab + (-4a) + 5a + (-5ab) + (-2a^2b)$

Se localizan los términos semejantes para sumar sus coeficientes:

$$3a^2b + 2ab + (-4a) + 5a + (-5ab) + (-2a^2b) = a^2b - 3ab + a$$

2) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}xy + \left(-\frac{1}{4}x^2\right) + \left(-\frac{5}{6}xy\right) + \frac{1}{4}y + (-y) = \frac{2}{4}x^2 - \frac{1}{6}xy - \frac{3}{4}y$

Asignando valores arbitrarios a las literales y sustituyéndolos en ambos miembros se pueden comprobar las igualdades anteriores.

Sustracción

Para restar términos semejantes se sigue un criterio semejante al de la suma.

Ejemplos:

1) Restar a $3a^2 b$, $5a^2 b$.

De los monomios anteriores, $3a^2 b$ es el minuendo y $5a^2 b$ el sustraendo. Si se observan sus literales y exponentes se concluye que los términos son semejantes:

$$3a^2 b - 5a^2 b$$

Ahora se restan sus coeficientes: $3 - 5 = -2$

De donde resulta que:

$$3a^2 b - 5a^2 b = -2a^2 b$$

Asignando valores arbitrarios a las literales se tiene:

$a = 5 \qquad b = -4$

$$\begin{aligned}
3a^2 b - 5a^2 b &= 3(5)^2 (-4) - 5(5)^2 (-4) \\
&= 3(25)(-4) - 5(25)(-4) \\
&= (-300) - (-500) \\
&= 200 \\
-2a^2 b &= -2(5)^2 (-4) \\
&= -2(25)(-4) \\
&= 200
\end{aligned}$$

De lo cual, resulta en los dos el mismo valor numérico.

2) Restar a $\frac{3}{4} a^2 b$, $\frac{1}{2} a^2 b$

$$\frac{3}{4} a^2 b - \frac{1}{2} a^2 b$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4}a^2b - \frac{1}{2}a^2b = \frac{1}{4}a^2b$$

3) Restar a $\frac{3}{4}x^2y^3$, $-\frac{4}{5}x^2y^3$

como el sustraendo es negativo, se coloca dentro de un paréntesis.

$$\frac{3}{5}x^2y^3 - (-\frac{4}{5}x^2y^3)$$

El inverso aditivo de $-\frac{4}{5}x^2y^3$ es $\frac{4}{5}x^2y^3$ por lo que se obtiene:

$$\frac{3}{5}x^2y^3 + \frac{4}{5}x^2y^3 = \frac{7}{5}x^2y^3$$

Recuérdese que, para restar dos números enteros, debe sumársele al minuendo el inverso aditivo o simétrico del sustraendo.

La adición y sustracción de monomios permiten simplificar las expresiones algebraicas y hacer más fáciles otras operaciones.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

Corresponde a la sesión de GA 3.40 RESTAR SUMANDO

La adición y la sustracción de polinomios son operaciones muy importantes dentro del álgebra, sobre todo para la correcta solución de ecuaciones y de otras situaciones que se verán posteriormente.

Para realizar una adición o una sustracción de polinomios, es conveniente recordar la reducción de términos semejantes. Esta consiste en agrupar los coeficientes de los términos semejantes en uno solo y acompañarlo de la literal o literales correspondientes, por ejemplo: $-6x + 2x = -4x$. Así, si los polinomios que se van a sumar tienen términos semejantes, se realiza la suma algebraica de los coeficientes y a ésta le seguirán las literales correspondientes. Si existen términos que no sean semejantes, éstos se colocarán en seguida de los que ya se redujeron, respetando el signo que les corresponde.

Ejemplos:

a) $(\underline{9x} + \underline{\underline{6y}} - 3) + (\underline{5x} - \underline{\underline{8y}}) = 14x - 2y - 3$

b) $(\underline{-2a^2} + \underline{\underline{7b}}) + (\underline{-5a^2} + \underline{\underline{b}}) = -7a^2 + 8b$

En el caso de la sustracción el procedimiento es muy semejante, sólo que el signo de los términos del sustraendo cambian (porque al efectuar la resta lo que se hace es sumar al minuendo el inverso aditivo del sustraendo). Hecho esto, se realiza la reducción de términos semejantes, como en la adición, y se escriben a continuación aquellos que no se redujeron.

Ejemplos:

a) $(-4m + 5n + 8) - (-2m + 7) = (\underline{-4m} + 5n + \underline{\underline{8}}) + (+\underline{2m} - \underline{\underline{7}}) = -2m + 5n + 1$

b) $(3a^2 - 5b) - (5a^2 - 8b) = (\underline{3a^2} - \underline{\underline{5b}}) + (\underline{-5a^2} + \underline{\underline{8b}}) = -2a^2 + 3b$

Obsérvese que la resta se convirtió en suma al cambiar los signos en todos los términos del polinomio que se estaba restando.

LEYES DE LOS EXPONENTES I

Corresponde a la sesión de GA 3.41 APLICA LA LEY

La potenciación es la operación matemática que abrevia la multiplicación de factores iguales.

Si se tiene un número cualquiera **a** elevado a una potencia cualquiera **m** eso significa que:

$$\underbrace{\mathbf{a}^m = a \bullet a \bullet a \bullet \ldots a}_{\text{m veces}}$$

Tomando esta definición como base, es posible entender las leyes de los exponentes.

Primera ley. Producto de potencias con la misma base.

TS/AA/CB/3/V.1/P-177-292.PM7.0 276 4/10/03, 12:23 PM

Ejemplo:

$$a^4 \bullet a^3$$

Por la definición de potencia se tiene:

$$a^4 \bullet a^3 = \underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet a}_{a^4} \bullet \underbrace{a \bullet a \bullet a}_{a^3}$$

Donde **a** aparece 7 veces como factor, por tanto:

$$a^4 \bullet a^3 = a^{4+3}$$
$$a^7$$

Y al generalizar se puede afirmar que:

$$\boxed{a^m \bullet a^n = a^{m+n}}$$

Segunda ley. Cociente de potencias con la misma base.

Ejemplo:

$$\frac{a^5}{a^2}$$

Por la definición de potencia se tiene:

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a}{a \bullet a}$$

Si se cancelan factores iguales:

$$\frac{a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a}{a \bullet a} = \frac{a \bullet a \bullet a}{1}$$

De donde se puede concluir que:

$$\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2}$$
$$= a^3$$

Al generalizar se tiene:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

De esta ley se puede deducir lo siguiente. Si se tiene:

$$\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5}$$

$$= a^{-3}$$

Y como se sabe que:

$$\frac{a^2}{a^5} = \frac{a \bullet a}{a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a}$$

$$= \frac{1}{a \bullet a \bullet a}$$

$$= \frac{1}{a^3}$$

Por transitividad:

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

De lo que se puede concluir que:

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

Tercera ley. Potencia de una potencia.

Ejemplo:

$$(a^3)^4$$

Por la definición de potencia se tiene:

$$(a^3)^4 = a^3 \bullet a^3 \bullet a^3 \bullet a^3$$

Aplicando la ley 1:

$$a^3 \bullet a^3 \bullet a^3 \bullet a^3 = a^{3+3+3+3}$$
$$= a^{12}$$
$$(a^3)^4 = a^{3 \times 4} \quad (a^3)^4 = a^{12}$$

Por tanto se tiene que:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \bullet n}}$$

La correcta aplicación de estas leyes te auxiliarán en la resolución de expresiones aritméticas y algebraicas.

LEYES DE LOS EXPONENTES II

Corresponde a la sesión de GA 3.42 UNA LEY INQUEBRANTABLE

Otras leyes de los exponentes son las siguientes:

Cuarta ley. Para la potencia de un producto se tiene:

Ejemplo:

$$(ab)^4$$

Si se aplica la definición de potencia:

$$ab \bullet ab \bullet ab \bullet ab$$

Por la propiedad conmutativa:

$$a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet b \bullet b \bullet b \bullet b$$

Como la potenciación es una multiplicación abreviada:

$$a^4\, b^4$$

Al generalizar se tiene:

$$\boxed{(ab)^n = a^n\, b^n}$$

Quinta ley. Cuando un cociente se eleva a una potencia:

Ejemplo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Se aplica la definición de potencia:

$$\frac{a}{b} \bullet \frac{a}{b} \bullet \frac{a}{b}$$

Al indiciar la multiplicación de numeradores y denominadores:

$$\frac{a \bullet a \bullet a}{b \bullet b \bullet b}$$

Si se abrevia la multiplicación de las fracciones:

$$\frac{a^3}{b^3}$$

Con lo que se concluye:

$$\left(\frac{a^3}{b}\right) = \frac{a^3}{b^3}$$

Al generalizar se tiene:

$$\boxed{\left(\frac{a^n}{b}\right) = \frac{a^n}{b^n}}$$

De las leyes anteriores, se pueden deducir los siguientes casos. Al tener la división de potencias de la misma base y exponente, se aplica la segunda ley y se tiene que:

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n}$$

$$= a^{\circ}$$

Pero como el cociente de la división cuando el divisor y el dividendo son iguales es 1, entonces:

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

Por transitividad:

$$\boxed{a^\circ = 1}$$

De donde se concluye que:

Todo número elevado a la potencia 0 es igual a 1.

Si se tiene la expresión:

$$\frac{a^4}{a^3} = a^{4-3}$$

$$= a^1$$

Al aplicar la definición de potencia:

$$\frac{a \bullet a \bullet a \bullet a}{a \bullet a \bullet a}$$

Se cancelan los dividendos y divisores iguales y se tiene:

$$\frac{a \bullet a \bullet a \bullet a}{a \bullet a \bullet a} = a$$

Por transitividad:

$$a^1 = a$$

Con lo que se concluye que:

Todo número elevado a la primera potencia es igual a ese mismo número.

Otro caso especial de la potenciación es cuando el exponente es fraccionario.

Ejemplo:

$$a^{\frac{3}{2}}$$

Si se eleva a la potencia que indica el denominador del exponente:

$$\left(a^{\frac{3}{2}} \right)^2$$

Por la definición se tiene:

$$\left(a^{\frac{3}{2}}\right) \left(a^{\frac{3}{2}}\right)$$

Debido a la primera ley de los exponentes:

$$a^{\frac{6}{2}} = a^3$$

Por la propiedad transitiva:

$$\left(a^{\frac{3}{2}} \right)^2 = a^3$$

Si se extrae raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad se tiene:

$$\sqrt{\left(a^{\frac{3}{2}} \right)^2} = \sqrt{a^3}$$

Al eliminarse la raíz y la potencia (por ser operaciones inversas) se tiene que:

$$a^{3/2} = \sqrt[2]{a^3}$$

Por tanto, al generalizar:

$$\boxed{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$$

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS Y POLINOMIOS

Corresponde a la sesión de GA 3.43 TODOS CONTRA TODOS

La multiplicación es una operación aritmética muy importante que también se emplea en las expresiones algebraicas. Es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas factores, hallar una tercera a la cual se le llama producto.

Recuérdese que un monomio consta de un término, formado por un coeficiente, una parte literal y un exponente. Un polinomio es la expresión algebraica constituida por dos o más términos, los cuales están separados por un signo más (+) o un signo menos (–).

En la multiplicación de monomios y polinomios existen diversos casos, entre los que se encuentran:

— Multiplicación de monomios
— Multiplicación de un polinomio por un monomio
— Multiplicación de polinomios

Producto de monomios

Para hallar el producto de monomios, se multiplican primero los coeficientes de los factores, respetando la ley de los signos.

Y por último, se escribe la parte literal con un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga cada factor (si son de igual base) o el producto se deja indicado cuando su base es diferente. Observe estos ejemplos:

1. $(4x^2)\ (-\ 2x^5) \quad = -\ 8x^{2\ +\ 5}$

$= -\ 8x^7$

2. $(-0.5a^3)(-2.4a^4\ b) = 1.2\ a^{3+\ 4}\ b$

$= 1.2\ a^7\ b$

Obsérvese la siguiente multiplicación de monomios.

3. $(\frac{4}{5} a^3 b^2)\ (-\ 0.2\ ab)\ (7\frac{1}{4} a)\ (-\ 4b) =$

Se puede resolver convirtiendo los coeficientes a números decimales

$(\frac{4}{5} a^3\ b^2)\ (-0.2\ ab)\ (7\frac{1}{4} a)\ (-4b) = (0.8\ a^3\ b^2)\ (-0.2ab)\ (7.25\ a)\ (-4b)$

Se aplican los mismos criterios. Primero se realiza el producto de los coeficientes de los factores, respetando la ley de los signos. A continuación, se escribe la parte literal común con el exponente igual a la suma de los exponentes de cada factor de igual base, o sólo se indica el producto en los factores de base diferente.

$$(0.8\ a^3\ b^2)\ (-\ 0.2\ ab)\ (7.25a)\ (-\ 4b) = 4.64\ a^{3+1+1}\ b^{2+1+1}$$
$$= 4.64\ a^5\ b^4$$

Producto de un polinomio por un monomio

Para efectuar esta multiplicación, se efectúa el producto del monomio por cada uno de los términos del polinomio —teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos— se separan los productos parciales con sus propios signos (ley distributiva de la multiplicación). No se debe olvidar que en la parte literal de cada factor, se suman los exponentes de igual base, o el producto se deja indicado si son de base diferente.

Véase el siguiente ejemplo:

1. $(3m^2 - 6n + 7)\ (4bmn) =$
   $= (4bmn)\ (3m^2) + (4bmn)\ (-\ 6n) + (4bmn)\ (+7)$
   $= 12\ bm^{2+1}n - 24\ bmn^{1+1} + 28\ bmn$
   $= 12\ bm^3n - 24b\ mn^2 + 28\ bmn$

2. $(0.7x^2 - 2xy + 1.3\ y^2)\ (-xy)$, este producto también puede calcularse colocando los factores en forma vertical y aplicando los mismos criterios:

$$\begin{array}{r} 0.7\ x^2 - 2xy + 1.3\ y^2 \\ -xy \\ \hline -0.7\ x^3\ y + 2x^2\ y^2 - 1.3\ xy^3 \end{array}$$

Producto de polinomios

Para encontrar el producto de dos polinomios, se inicia efectuando los productos parciales de cada uno de los términos; esto es, se multiplica cada uno de los términos de uno de los polinornios por cada uno de los términos del otro.

Véase el ejemplo:

1. $(4x + 8)\ (3x - 7) = 3x\ (4x + 8) - 7\ (4x + 8)$
$ = 12x^2 + 24x - 28x - 56$

El producto resultante se reduce sumando los términos semejantes.

$12x^2 + \underline{24x} - \underline{28x} - 56 = 12x^2 - 4x - 56$

Este producto también puede llevarse a cabo colocando los factores en forma vertical:

$$\begin{array}{r} 4x + 8 \\ \underline{3x - 7} \end{array}$$

Se realizan los productos. Primero se multiplica uno de los términos del segundo polinomio por todos los del primero, empezando por la izquierda:

$$\begin{array}{rr} 4x & +\ 8 \\ 3x & -\ 7 \\ \hline 12x^2 & +\ 24x \end{array}$$

Después se multiplica el otro término por el primer polinomio, alineando los términos semejantes, y por último se reduce, sumando esos términos:

$$\begin{array}{rrr} 4x & +\ 8 & \\ 3x & -\ 7 & \\ \hline 12x^2 & +\ 24x & \\ & -\ 28x & -\ 56 \\ \hline 12x^2 & -\ 4x & -\ 56 \end{array}$$

Si se comparan los productos en ambos procedimientos, se observa que son iguales.

2. (2x + 5y) (3x – 8)

$$
\begin{array}{rrrr}
2x & + 5y & & \\
3x & - 8 & & \\
\hline
6x^2 & + 15xy & & \\
 & & -16x & - 40y \\
\hline
6x^2 & + 15xy & -16x & - 40y
\end{array}
$$

En este caso, no hay términos semejantes entre los productos parciales. Por tanto, no es posible reducirlos.

Cualquiera que sea el algoritmo que se utilice, el producto se calculará siguiendo estos procedimientos:

En el producto de monomios, se multiplican los coeficientes de cada factor, respetando la ley de los signos. A continuación se escribe la parte literal, siendo su exponente igual a la suma de los exponentes de igual base; o se deja indicado cuando los factores son de diferente base.

En el producto de un polinomio por un monomio se aplica la ley distributiva de la multiplicación, que consiste en realizar el producto del monomio por cada uno de los términos del polinomio. Los productos parciales se separan con sus propios signos.

En el producto de polinomios se obtienen los productos parciales y se reducen los términos semejantes.

DIVISIÓN DE MONOMIOS Y DE POLINOMIOS ENTRE MONOMIOS

Corresponde a la sesión de GA 3.44 DIVIDIR ES UN JUEGO DIVERTIDO

Dividir significa encontrar un factor (cociente), que multiplicado por el divisor dé como producto el dividendo.

Ejemplos:

$7 \times$ ______ $= 56$ $\qquad$ $56 \div$ $=$ ______

$3a^2$ ______ $= 6a^3b$ $\qquad$ $6a^3b \div 3a^2 =$ ______

¿Recuerdas a los monomios? Son aquellos que se forman por un solo término (coeficiente, parte literal y exponente). Y ¿los polinomíos?, son los que se forman por dos o más términos.

En esta sesión aprenderás los siguientes casos de la división.

Entre monomios
De un polinomio entre un monomio

División de monomios

Para obtener el cociente entre dos monomios, se dividen los coeficientes, respetando la regla de los signos. En seguida anotamos la literal, cuyo exponente será igual a la diferencia del exponente del dividendo y el del divisor si son de igual base; si su base es diferente sólo se dejará indicado el cociente. Ejemplos:

1. $$\frac{20a^4b3}{-5a^2\,b} = -4a^{4-2}\,b^{3-1}$$
$$= -4a^2b^2$$

2. $$\frac{-0.5x^2\,yz}{-0.10xy} = 5x^{2-1}\,y^{1-1}\,z$$
$$= 5xz$$

Véase ahora el siguiente problema que se resuelve mediante el cociente de monomios.

Martín cabalga, de La Mora hasta Aguacatán que se encuentra como a $9a^2\,b^3$ km de distancia (d). Si emplea el tiempo (t) de 3b hr en su recorrido, calcula la velocidad (v) a la que iba.

La velocidad se calcula por la fórmula $v = \frac{d}{t}$, además, se tiene que

$d = 9a^2b^3$ km y $t = 3b$ hr, entonces al sustituir se tiene $v = \dfrac{9a^2b^3\text{ km}}{3b\text{ hr}}$

Por tanto, $v = 3a^2b^2 \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

División de un polinomio entre un monomio

Este cociente se obtiene al dividir cada uno de los términos del polinomio por el monomio, separando los cocientes parciales con sus propios signos (ley distributiva de la división).

Se tiene la división:

1. $2m^2n - 4mn^2 \div 2mn$

$$\frac{2m^2n - 4mn^2}{2mn} = \frac{2m^2n}{2mn} - \frac{4mn^2}{2mn}$$

Ahora se obtienen los cocientes parciales

$$\frac{2m^2n}{2mn} - \frac{4mn^2}{2mn} = \frac{2}{2}m^{2-1}n^{1-1} - \frac{4}{2}m^{1-1}n^{2-1}$$

$$= m - 2n$$

Como se observó en el ejemplo anterior, el cociente con expresiones algebraicas se obtiene como sigue:

> En la división de monomios primero se divide el coeficiente del dividendo entre el del divisor, respetando la ley de los signos. A continuación, se escriben las literales, cuyo exponente es igual a la diferencia del exponente del dividendo y el del divisor si su base es igual. Cuando sus bases sean diferentes se deja indicando en el cociente.
>
> En la división de un polinomio entre monomio se aplica la ley distributiva de la división, que consiste en dividir cada uno de los términos del polinomio por el monomio separando los cocientes parciales con sus propios signos.

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Corresponde a la sesión de GA 3.45 JUEGO DE TÉRMINOS

La división de polinomios tiene un algoritmo muy semejante al de la división de números naturales. Por tanto, para encontrar el cociente de dos polinomios se aplica la siguiente regla, que es similar a la de la división numérica.

Se tiene $(3m^2 + 2m - 8) \div (m + 2)$

1. Se ordenan el dividendo y el divisor en relación con una misma letra en forma descendente y se dividen el primertérmino del dividendo entre el primero del divisor, obteniéndose así el primer término del cociente.

$$\mathbf{m}+2 \;\overline{\big)\, \mathbf{3m^2} + 2m - 8} \qquad \frac{3m^2}{m} = \mathbf{3m}$$

2. Este término se multiplica por todo el divisor y el producto se resta (inverso aditivo) del dividendo, escribiendo cada término debajo de su semejante:

$$\begin{array}{r|l} & 3m \\ \hline m+2 & 3m^2 + 2m - 8 \\ & -3m^2 - 6m \\ \hline \end{array} \qquad 3m\,(m+2) = \mathbf{3m^2 + 6m}$$

inverso aditivo

3. Se reducen los términos semejantes y se “baja” el siguiente término dei dividendo:

$$\begin{array}{r|l} m+2 & 3m^2 + 2m - 8 \\ & -3m^2 - 6m \\ \hline & \quad -4m - 8 \end{array}$$

4. Se divide ahora el primer término del residuo parcial entre el primer término del divisor y se obtiene el segundo término dei cociente; se repiten estos pasos hasta que el residuo sea cero o cuando el residuo de la división es un polinomio de grado menor que el del divisor.

$$\begin{array}{r|l} & 3m - 4 \\ \hline m+2 & 3m^2 + 2m - 8 \\ & -3m^2 - 6m - 8 \\ \hline & \quad -4m - 8 \\ & \quad +4m + 8 \\ \hline & \qquad\quad 0 \end{array} \qquad \frac{-4m}{m} = -4 \qquad -4\,(m+2) = -4m - 8$$

inverso aditivo

Véase el siguiente ejemplo:

$$(36y - 24 - 18y^2 + 3y^4) \div (y - 2)$$

a) Se ordenan los polinomios en forma decreciente respecto a y:

$$y-2\ \overline{\big)\ 3y^4-18y^2+36y-24}$$

b) Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor para obtener el primer término del cociente:

$$\begin{array}{r|l} & 3y^3 \\ \hline \mathbf{y}-2 & \mathbf{3y^4}-18y^2+36y-24 \end{array} \qquad \frac{3y^4}{y} = \mathbf{3y^3}$$

c) Se multiplica este término por el divisor y el producto se resta del dividendo, anotando cada término debajo de su semejante. Si algún término no aparece en el dividendo se anota en el lugar que le corresponda, de acuerdo con un orden lógico, y se baja el término siguiente:

$$\begin{array}{r|lll} & 3y^3 & & \\ \hline y-2 & 3y^4 & & -18y^2+36y-24 \\ & -3y^4 & +6y^3 & \\ & & 6y^3 & -18y^2 \end{array} \qquad 3y^3\,(y-2) = \mathbf{3y^4-6y^3}$$

inverso aditivo

Se divide el primer término del residuo entre el primero del divisor, obteniéndose el segundo término del cociente. Se continúa de manera similar hasta darse por concluido el procedimiento cuando se obtenga como residuo un polinomio de grado menor al divisor o el residuo sea 0.

$$\begin{array}{r|lllll} & 3y^3 & +6y^3 & -6y & +24 & \\ \hline y-2 & 3y^4 & & -18y^2 & +36y & -24 \\ & -3y^4 & +6y^3 & & & \\ \cline{2-3} & & 6y^3 & -18y^2 & & \\ & & -6y^3 & +12y^2 & & \\ \cline{3-4} & & & -6y^2 & +36y & \\ & & & +6y^2 & -12y & \\ \cline{4-5} & & & & +24y & -24 \\ & & & & -24y & +48 \\ \cline{5-6} & & & & & +24 \end{array}$$

$$\frac{6y^3}{y} = 6y^2$$

$$6y^2\,(y\text{-}2) = 6y^3-12y^2$$

$$\frac{-6y^2}{y} = -6y$$

$$= -6y\,(y-2)\ -6y^2+12y$$

$$\frac{24y}{y} = 24$$

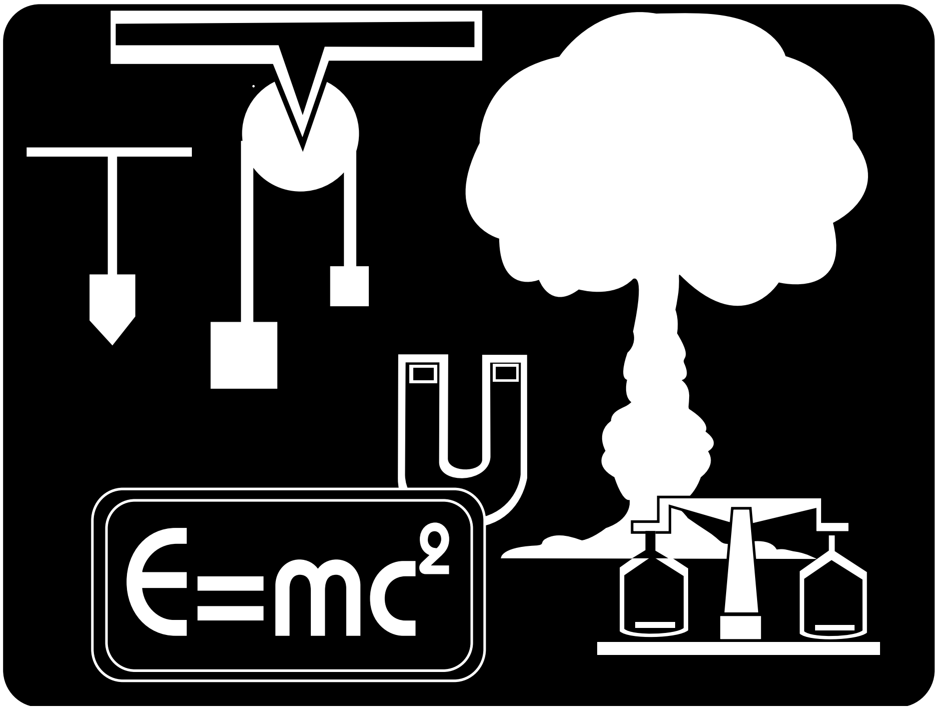
$$24\,(y-2) = 24y-48$$

Para dividir dos polinomios se usa un algoritmo muy similar al de la división de números naturales, el cual se resume en los siguientes pasos:

1. Se ordenan los polinomios en forma decreciente respecto a una literal.
2. Se obtiene el primer cociente al dividir el primer término del dividendo entre el primero del divisor.
3. Se multiplica este término por todo el divisor y el producto se resta (inverso aditivo) del dividendo, escribiendo cada término debajo de su semejante y bajando el siguiente término.
4. Se repiten estos pasos hasta que el residuo sea cero o menor grado al divisor.

Para comprobar la división, se multiplica el cociente por el divisor, sumando el residuo a este producto (si es diferente de cero). El resultado de esta multiplicación debe ser igual al dividendo.

FÍSICA



PRESENTACIÓN

El curso que se desarrolla en este libro te ayudará a dar un paso más en el conocimiento de la física y, por lo mismo, de tu realidad; es necesario que aumentes tu esfuerzo por comprender los fenómenos que suceden en tu entorno, recuerda que éstos no son exclusivamente físicos, por lo cual es necesario relacionar los conocimientos que obtienes en otras materias con los de Física, para que consigas un mejor entendimiento.

Durante el curso se estudiarán las características de los sólidos y fluidos, sus propiedades y la diferencia entre líquidos y gases; los conceptos de calor y temperatura, las diferentes escalas para medir la temperatura, la transferencia de calor y algunas aplicaciones de las leyes de la termodinámica; la electricidad y el magnetismo, sus fuerzas y efectos, los motores, generadores y transformadores y sus aplicaciones; el sonido, sus características, su propagación, el oído y la audición; en óptica se estudiarán las características del movimiento ondulatorio, la radiación electromagnética, el ojo y la visión.

Recuerda que es importante mantener una *actitud científica* en todo momento, lo lograrás si te preguntas qué sucede y cómo sucede cuando observes alguna de las actividades que realizas o los fenómenos que suceden a tu alrededor, tanto en tu escuela como en los lugares que acostumbras frecuentar. Si no tienes las respuestas, investiga, pregunta, busca libros o artículos relacionados con el tema; una vez que tengas suficiente información, analízala, si es posible, con la asesoría de tu docente y trata de llegar a una conclusión sobre los cuestionamientos que te hayas hecho.

Te damos la bienvenida, esperamos que el libro te agrade y lo aproveches, este es el último año que estarás en Telesecundaria, disfrútalo, realiza tu mejor esfuerzo y continúa aprendiendo.

TS/AA/CB/3/V.1/P-293-372.PM7.0 295 3/12/03, 4:13 PM

Capítulo 1

HORIZONTES DE LA FÍSICA

Desde la utilización de las palancas simples hasta el uso de la energía atómica, el hombre ha ido aprendiendo y aplicando las leyes de la física, lo importante ha sido observar, planear, experimentar, comprobar, rechazar, una y otra vez, cada fenómeno o conocimiento hasta aceptarlo, o bien descubrir otros nuevos, lo importante es aprender.

PRESENTACIÓN

Corresponde a la sesión de GA 1.1 MÁS FÍSICA

La **física** forma parte de las ciencias encargadas del estudio de la naturaleza, ésta se aboca al estudio de la materia y las transformaciones de la energía. Introducirse en el estudio de esta ciencia es importante porque a través de ello se puede apreciar y comprender el funcionamiento de instrumentos, aparatos y máquinas utilizados cotidianamente, los cuales tienen como fundamento principios físicos. Algunos de éstos son abordados en este curso de física, cuyos contenidos están organizados de tal forma que los primeros sean la base para los contenidos siguientes, es decir, tienen una secuencia.

Conocer de antemano los temas que se van a tratar a lo largo del año sirve para tener una idea general del contenido del curso, éste se divide en ocho núcleos, en donde se habla de las características de los sólidos y del comportamiento de los fluidos (líquidos y gases) en reposo y movimiento, así como de algunos principios interesantes entre los que se encuentran el de Pascal y el de Arquímedes, los cuales se han utilizado en la elaboración de algunos juguetes.

El termómetro es un instrumento muy utilizado y conocido por el individuo desde que es niño; a lo largo del curso se apreciará que calor y temperatura son conceptos diferentes y a pesar de ello es muy común utilizarlos indistintamente como si fueran sinónimos; también se conocerán algunas escalas para medir la temperatura, las formas de transmisión del calor, la aplicación de las leyes de la termodinámica en forma práctica, la influencia del calor en la dilatación de los cuerpos y el comportamiento y aplicación del calor en general.

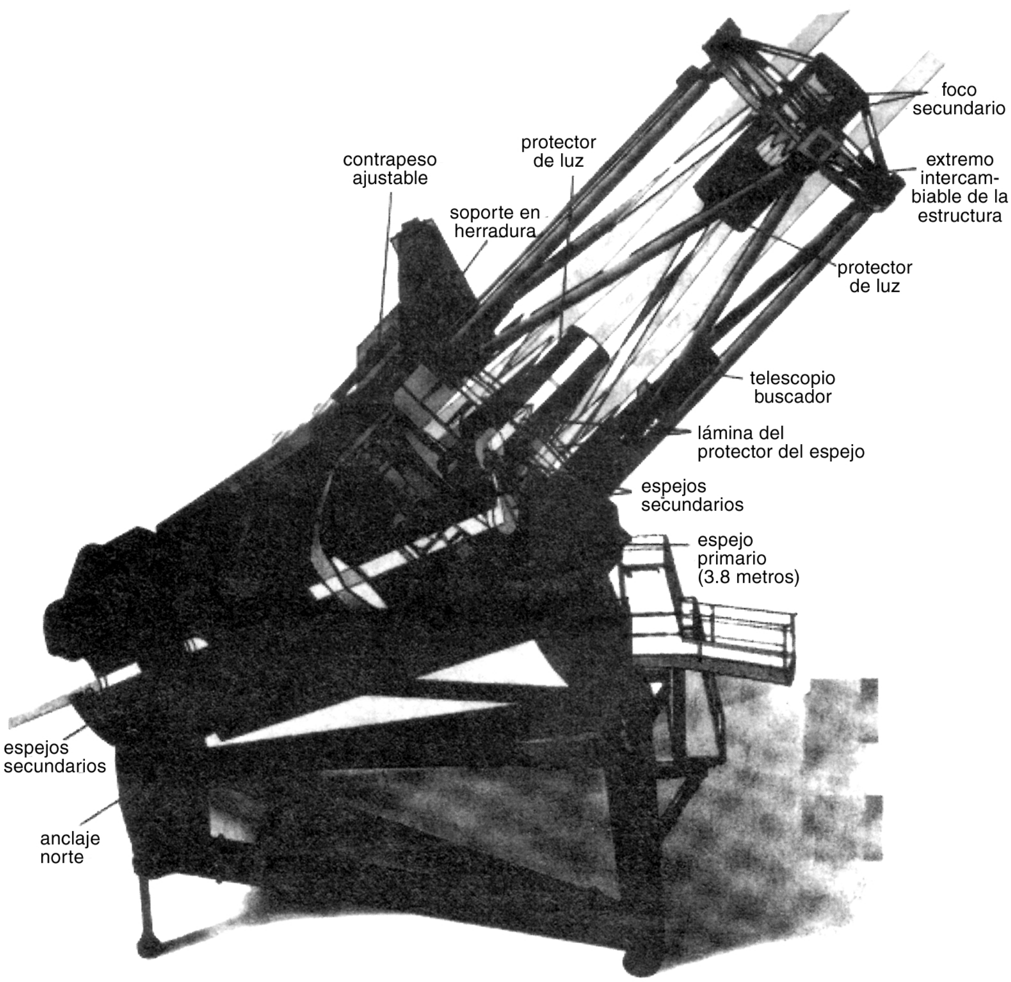
En otros núcleos se estudiarán la electricidad y el magnetismo, fenómenos físicos que se utilizan cotidianamente en forma mecánica, es decir, sin reparar en ellos, como al encender la luz o prender y apagar cualquier aparato eléctrico.

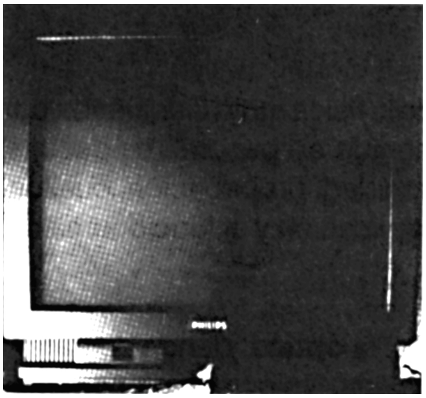
Aquí se identificará:

Una corriente eléctrica, un electrólito, un conductor, un aislante, una batería o pila, un imán; la relación existente entre la electricidad y el magnetismo y su aplicación en motores y generadores; algunas leyes como: la de Ohm, Joule y Coulomb, entre otras.

Más adelante se hablará sobre **acústica**, parte de la física muy relacionada con el sentido del oído; encargada de estudiar el sonido en general, es decir, el sonido como un movimiento ondulatorio, su velocidad, propagación, cualidades, instrumentos musicales como parte de su aplicación y el funcionamiento del oído (audición).

Finalmente se abordará un tema muy interesante: la **óptica,** donde se trata lo referente a la luz en forma general, su naturaleza, velocidad, fenómenos luminosos, así como la aplicación de espejos y lentes en aparatos ópticos, la descomposición de la luz, el funcionamiento del ojo y la visión.





Los conocimientos que se tratarán en este curso te servirán para entender el funcionamiento de algunos aparatos como: el radio, la televisión, el microscopio y los telescopios más potentes utilizados en la actualidad.

El contenido del curso da ciertos elementos para comprender algunos fenómenos, que pueden ser utilizados para beneficiar a la comunidad cuando sean empleados adecuadamente, además, se pueden planear visitas a museos e industrias.

FINES DEL CURSO

Corresponde a la sesión de GA 1.2 SIGUE UN CAMINO

Los conocimientos que forman una ciencia se han ido acumulando a través del tiempo, con base en las investigaciones realizadas por muchos hombres a los que se denomina **científicos.**

Los primeros hombres de ciencia obtuvieron estos logros gracias a la **observación constante y continua** que realizaron de la naturaleza y del universo en general; de sus observaciones, **elaboraban preguntas,** de éstas se desprendían **suposiciones** del porqué acontecían esos fenómenos, luego de razonarlas algunos formularon conclusiones que eran aceptadas como verdaderas; con el paso del tiempo los científicos utilizaron en sus investigaciones, además, la **observación y las hipótesis, la experimentación y el registro de datos** para **analizar** y sacar **conclusiones,** lo que permitió desechar varias teorías ya establecidas, ya que al tratar de comprobarlas, los resultados obtenidos no coincidían con las suposiciones y conclusiones elaboradas en un principio.

De esta forma, los conocimientos científicos pueden ser comprobados por cualquier persona interesada, que **siga un procedimiento adecuado** para llegar a ellos, es decir, se puede hacer ciencia siguiendo y adecuando los conocimientos a las necesidades que presente el fenómeno en estudio.

Por ejemplo:

"Torricelli era ayudante de Galileo y observó cómo éste intentó vanamente crear el vacío tirando de un pistón encerrado en un cilindro, esto llamó la atención del joven Torricelli, quien más tarde se empeñó en descubrir la razón por la cual la naturaleza se resistía a la creación del vacío, para este propósito mandó preparar dos tubos de vidrio de un metro y quince centímetros, cerrados en un extremo. Después de llenar cada tubo con mercurio (al que llamaba azogue), puso un dedo en los extremos abiertos e invirtió los tubos para introducirlos en un recipiente con mercurio, el cual descendió de los tubos hasta unos 78 centímetros por encima de la superficie del metal que llenaba el recipiente.

Torricelli declaró que el espacio vacío comprendido entre la parte superior del tubo invertido y la columna del metal era un vacío, pues resultaba imposible que hubiera entrado algo allí cuando descendió el mercurio, también explicó que la fuerza que mantenía al metal en las columnas era la presión del aire, esto condujo a la invención del barómetro."[1]

De lo anterior, se puede decir que la observación hecha por Torricelli fue sobre el experimento de Galileo relacionado con el vacío; experimentó con los tubos de vidrio llenos con mercurio, analizó los datos que tenía al deducir que el espacio en los tubos era el vacío y aplicó este conocimiento en la invención del barómetro.

En este curso se pretende desarrollar, por medio de las actividades, la capacidad de **observación en forma sistemática** y **la comprobación** de los fenómenos físicos que suceden a su alrededor, poniendo especial atención a los relacionados con los contenidos de tercer grado, así como la **aplicación en beneficio de su comunidad o población.**

La física está al alcance de todos, porque la ciencia no es exclusiva de unas cuantas personas, ni tan rigurosa y formal como generalmente se cree, ya que ha surgido como consecuencia de las **actividades humanas;** dando como resultado **el desarrollo de la tecnología** que forma parte de la vida cotidiana y que cada día tiene un mejor y mayor avance.

[1] Greene, Gay E., *100 grandes científicos,* 2a. ed., México, Diana, 1967.

También, dentro de los propósitos, es importante reflexionar sobre la forma más eficaz de explicar los conocimientos de física **para prevenir y eliminar los procesos contaminantes,** que degradan a grandes pasos las bondades que el planeta Tierra le ha brindado al ser humano.

EXPERIMENTACIÓN

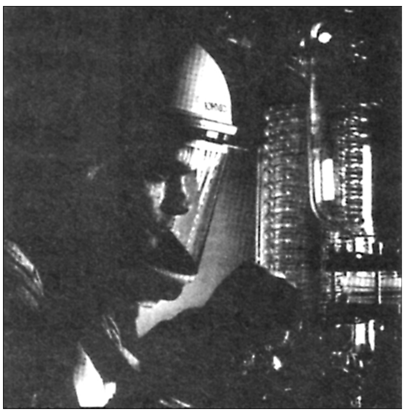
Corresponde a la sesión de GA 1.3 SIEMPRE SE PUEDE

La experimentación es un paso muy importante dentro de la investigación científica, que sirve para comprobar las hipótesis y teorías planteadas.

Los grandes científicos como: Galileo Galilei, Evangelista Torricelli y Roberto Boyle, entre otros, formularon gran cantidad de hipótesis y procedieron a su comprobación por medio de la experimentación para reafirmar o desechar sus teorías.

Según Galileo se aprende acerca de la naturaleza mediante la observación y la experimentación, él vivió de 1564 a 1642, en esa época no se disponía de muchos aparatos o utensilios que ahora son de uso común, como: el radio, la televisión, una olla de presión, recipientes de vidrio resistentes al calor, una estufa de gas o tal vez hasta una computadora; pero no por ello dejó de experimentar, ya que utilizó su ingenio en aprovechar todo lo que le rodeaba para aplicarlo en la experimentación, y con ello lograr que sus hipótesis fueran aceptadas o rechazadas. Entre sus principales logros está el haber construido un telescopio, y con ayuda de él escribió su libro *Diálogos sobre dos nuevas ciencias,* publicado en 1638.

Es importante que la observación se realice con sumo cuidado, porque un fenómeno ya estudiado, al producirse, puede comportarse de diferente forma, lo cual, lo convierte nuevamente en objeto de estudio, llevando al investigador a formular una nueva hipótesis sujeta a la experimentación y comprobación, determinando de esta manera, si la teoría o ley formulada con anterioridad a ésta se modifica, desecha o queda igual.



De lo anterior se deduce que toda ley o teoría está sujeta a cambios, es decir, a ser modificada o desechada, siempre y cuando existan datos suficientes que lo permitan.

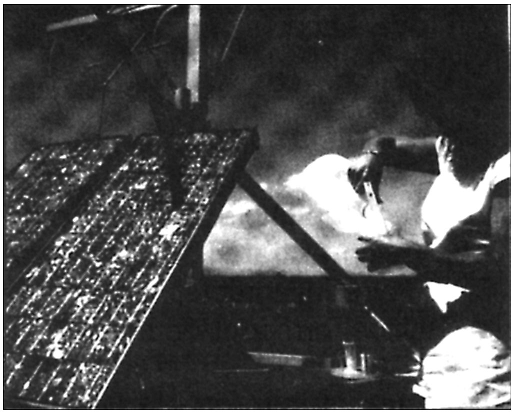
Para experimentar hay que tomar en cuenta lo siguiente:

a) Las actividades experimentales se pueden llevar a cabo dentro y fuera del laboratorio. Si no hay el material que se pide para realizar determinada práctica se tiene que sustituir, si es posible, por otro que tenga la misma función que el que se pide, recordando que lo importante es comprobar la teoría o ley.

b) Siempre se debe tener un propósito claro, es decir, una hipótesis a comprobar.

c) Dentro de un laboratorio existen las instalaciones necesarias para llevar a cabo la experimentación, y si se cumple con las normas de seguridad, ésta se debe desarrollar sin contratiempo alguno.

d) Si la experimentación se lleva a cabo fuera del laboratorio estas normas no varían mucho, y si es necesario, aumentar las precauciones durante el desarrollo de la misma, ya que las instalaciones no serán las adecuadas.



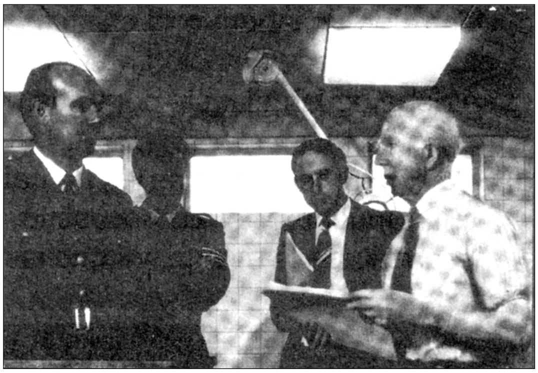
PROYECTO

Corresponde a la sesión de GA 1.5 EN BUSCA DE UNA META

Cuando se presenta un problema a resolver, la mayoría de las veces se actúa sin pensar en qué obstáculos se presentarán, el tiempo que tardará en encontrarse la solución y con qué se cuenta para hacerlo, simplemente se empieza a tratar de solucionarlo; y si se consigue hacerlo, la mayoría de las veces no se tiene el cuidado de tomar nota de cómo fue que se hizo y qué experiencias se realizaron, sólo se toma en cuenta que ya está resuelto.

La desventaja es, que si vuelve a presentarse el problema, habrá que repetir todo el proceso, y se corre el riesgo de no poder resolverlo en la siguiente ocasión.

Una forma correcta de hacerlo es planear la forma de resolverlo. Esto implica tomar en cuenta: qué hacer, cómo, para qué, quiénes participarán, las tareas a realizar, los medios con que se cuenta y el tiempo para hacerlo.



Una vez planeado el proyecto, se procede a su ejecución y paralelamente a la anotación de los resultados obtenidos, se debe tomar nota, tanto de los que se buscaban como de los inesperados.

A continuación se procede a la evaluación de los resultados, lo que servirá para saber si, "el qué hacer" planteado es correcto o no.

No siempre se puede encontrar la solución al problema, habrá ocasiones en que los resultados sean contrarios a los que se esperaban, sin embargo, habrá que sacar el mayor provecho posible a esto, como lo demostró Enrique Cavendish (1731-1810), quien al tratar de demostrar la teoría del flogisto, encontró lo que él llamó "aire inflamable", al que posteriormente Lavoisier llamó hidrógeno, que significa formador de agua.

Finalmente, se elaborará un informe en el que se explique el problema a resolver, para qué se quiere resolver, cómo se pensaba resolver, el diseño del proyecto, cómo se ejecutó y el análisis de los resultados obtenidos. No debe olvidarse anotar las problemáticas que surgieron durante la experimentación y la forma cómo se resolvieron.

Nota: si existe alguna duda de cómo realizar un proyecto, se sugiere consultar los artículos correspondientes en los libros de *Conceptos Básicos* de las asignaturas académicas de primero y segundo grados.

Capítulo 2

CUERPOS SÓLIDOS Y FLUIDOS

Los sólidos son cuerpos cristalinos formados por átomos, iones y moléculas. Se llaman fluidos a los líquidos y gases, aunque cada uno tiene propiedades particulares que los hacen muy diferentes entre sí. Fueron estas propiedades las que motivaron a Pascal, Arquímedes y otros investigadores a experimentar para lograr entenderlas, gracias a sus teorías, podemos estudiar en este capítulo temas como la cohesión, adhesión, tensión superficial, capilaridad, viscosidad, etcétera.

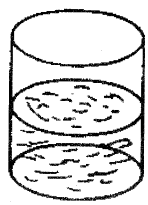
TS/AA/CB/3/V.1/P-293-372.PM7.0 305 3/12/03, 4:14 PM

CARACTERÍSTICAS DE LOS SÓLIDOS Y FLUIDOS

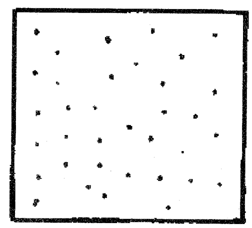
Corresponde a la sesión de GA 2.7 ¿CÓMO SON?

Desde tiempos remotos, el hombre ha observado que la naturaleza de las cosas que lo rodean es variada, es decir, que presenta diferentes características físicas; distingue que el agua de un río o de la lluvia es distinta a un cristal o una roca; éstos, a su vez, son diferentes del humo emitido por un volcán o por el vapor que escapa de la superficie de un lago.

SÓLIDO



LÍQUIDO



GAS

De hecho, estos tres estados físicos de la materia: sólido, líquido y gaseoso, que el hombre distinguió en su entorno, son algunos de los estados en que la materia se encuentra en el universo.

Todo aquello que impresiona nuestros sentidos, ocupa un lugar en el espacio y tiene masa, se define como materia, y puede presentarse en alguno de estos tres estados físicos.

La materia puede clasificarse, por su comportamiento mecánico, en dos grupos, que son: sólidos y fluidos; estos últimos engloban todos aquellos cuerpos que pueden fluir, es decir, líquidos y gases; aunque a la vez, presente características diferentes entre sí.

Toda la materia presenta una serie de características que, dependiendo del estado físico en el que se encuentre, se hacen más notables; así, los sólidos poseen: dureza o rigidez, tenacidad, elasticidad, maleabilidad y ductilidad; en los líquidos y los gases se presentan características como: la fluidez, común a ambos, y la compresibilidad[2], que se manifiesta únicamente en los gases.

[2] Para fines prácticos, no se considera la característica de compresibilidad en el caso de los sólidos y los líquidos.

Otras características de la materia y que son comunes en estos estados físicos son: volumen, masa, forma y densidad.

	ESTADO FÍSICO		
Característica	**Sólido**	**Líquido**	**Gas**
1. volumen	definido	definido	indefinido
2. masa	constante	constante	constante
3. densidad	alta	alta	baja
4. dureza o rigidez	presente	nula	nula
5. compresibilidad	no	no	sí
6. forma	propia	la del recipiente que lo contiene	la del recipiente que lo contiene
7. fluidez	nula	elevada	elevada

SÓLIDOS Y FLUIDOS

Corresponde a la sesión de GA 2.8 A SIMPLE VISTA

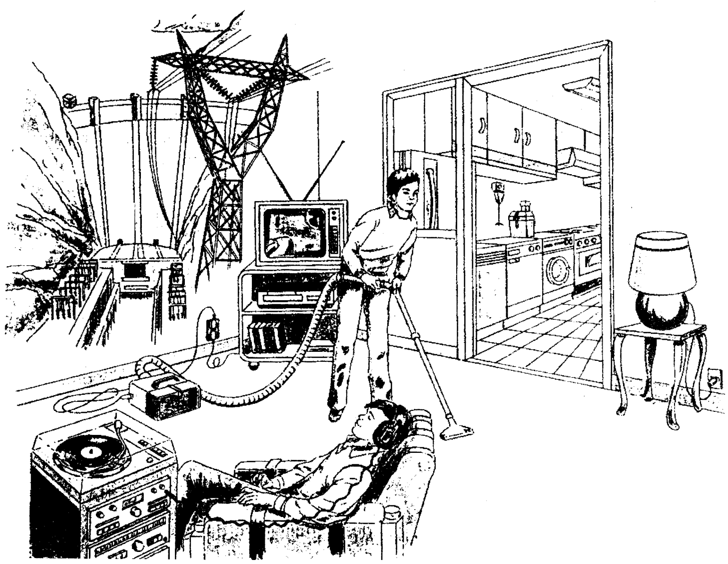
La materia existe como tal, gracias a un fenómeno que se presenta entre sus moléculas; dicho fenómeno se conoce hoy en día como la **acción de fuerzas intermoleculares**. Estas fuerzas son de dos clases: de atracción y de repulsión.

Las fuerzas intermoleculares, según sea su naturaleza, pueden ser de diferentes tipos: de atracción iónica, atracción dipolo-dipolo, enlace metálico y enlace iónico, entre otras. En general, a este tipo de fuerzas que actúan entre las moléculas se les denomina fuerzas de cohesión, y son las que determinan las propiedades de sólidos y fluidos.

Ahora se pretende determinar las características de **forma, dureza y fluidez**, tanto de sólidos como de fluidos. Estas características son el producto de la disposición molecular, consecuencia de las fuerzas de atracción y de repulsión.

La dureza, también conocida como rigidez, es la resistencia que opone un cuerpo con base en un experimento: a ser rayado por otro. Desde el siglo XVII, Mohs (1804) estableció una escala de dureza; ésta consistía en acomodar diez cuerpos minerales, de tal modo que uno era capaz de rayar a los que le seguían. En la escala resultante, el diamante se considera como la sustancia más dura y ocupa el primer lugar, en tanto que el talco ocupa el décimo lugar.

Forma: Los sólidos, en particular, son los cuerpos que presentan una forma definida, sin necesidad de ser depositados en un recipiente; esta característica es consecuencia de las fuerzas de atracción que hay entre sus moléculas;dado que dichas fuerzas son grandes y los espacios intermoleculares que las separan son mínimos, las moléculas apenas pueden vibrar, mas no desplazarse. Las fuerzas de repulsión son tan pequeñas que se les considera nulas. Otro factor que determina que los sólidos presenten una forma definida es la poca energía cinética (movilidad) que presentan sus moléculas.



Dureza: La dureza de un sólido siempre es mayor que la de un fluido; esta característica se debe a su arreglo o disposición molecular, la cual,por lo general, se encuentra en paquetes con un ordenamiento geométrico que se repite en todo el cuerpo del sólido; el ordenamiento puede de ser de seis tipos diferentes, a saber: cúbicos, tetragonales,monoclínicos, rómbicos, triclínicos y hexagonales. En cada una de estas disposiciones, las fuerzas de atracción son tan fuertes entre las moléculas que oponen gran resistencia a ser separadas, es decir, las moléculas tienden a conservar su lugar.

Los líquidos no presentan dureza, aunque sus moléculas se encuentren muy cercanas entre sí. La falta de dureza de los líquidos se debe a que las fuerzas de atracción se presentan con la misma intensidad que las fuerzas de repulsión, y las moléculas no forman ordenamientos geométricos; como las fuerzas se encuentran equilibradas, las moléculas se pueden mover de un lugar a otro, sin oponer resistencia.

Los gases, al igual que los líquidos, no presentan dureza, pero en aquéllos las moléculas se encuentran separadas por grandes distancias: las fuerzas de atracción son nulas; en cambio, las fuerzas de repulsión son muy grandes, de aquí que las moléculas se encuentren separadas y se puedan mover libremente sin cumplir ninguna restricción impuesta por un ordenamiento geométrico.

Fluidez: La fluidez, que presentan tanto líquidos como gases, es una característica que está estrechamente ligada a las fuerzas de atracción y de repulsión que existen entre las moléculas. Se dice que un cuerpo presenta fluidez cuando las fuerzas de repulsión entre las moléculas son iguales o mayores que las fuerzas de atracción; esto es, que sus moléculas se pueden desplazar libremente. Por estas particularidades, los sólidos no presentan fluidez, sus moléculas no tienen desplazamientos, y las fuerzas de atracción son muy superiores a las fuerzas de repulsión, teniendo como causa el compactamiento de dichas moléculas.

Los líquidos y los gases, como es de suponer, sí presentan la característica de fluidez, ya que en los líquidos las fuerzas de repulsión son de igual magnitud que las fuerzas de atracción y, en los gases, las fuerzas de repulsión son superiores a las fuerzas de atracción, las moléculas se pueden desplazar y este desplazamiento es una condición necesaria para la fluidez.

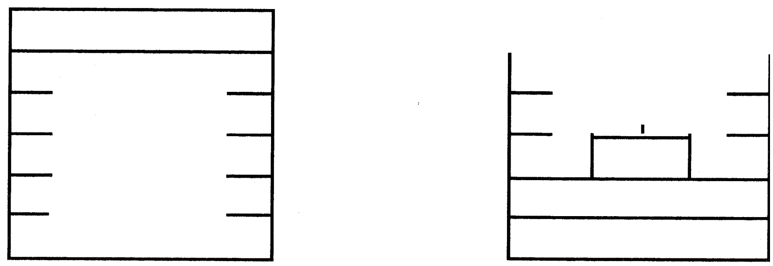
	Sólido	**Líquido**	**Gas**
Forma	propia	la del recipiente que lo contiene	indefinida
Dureza	presente	nula	nula
Fluidez	nula	elevada	elevada

Forma, dureza y fluidez de sólidos, líquidos y gases.

LÍQUIDOS Y GASES

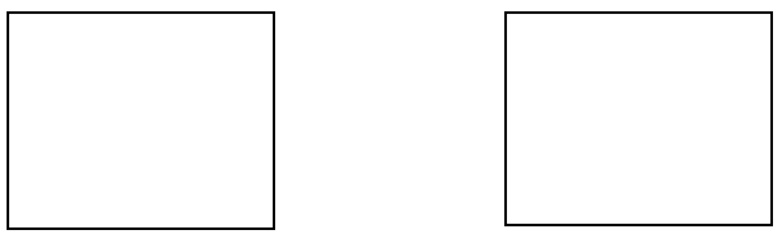
Corresponde a la sesión de GA 2.9 ¿CUÁL ES CUÁL?

Los gases poseen una característica muy particular que no presentan los líquidos ni los sólidos, esta característica es la compresibilidad. Un gas puede ser comprimido mediante la aplicación de una fuerza (presión).



Demostración de la compresibilidad de un gas al ser sometido a una fuerza.

Otra característica de todos los gases es no poseer un volumen constante o fijo, ya que el gas tiende a ocupar el volumen del recipiente que lo contiene.



16 kg O_2 8 kg O_2

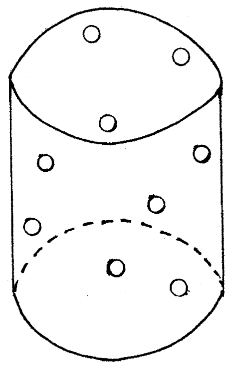
Una masa de gas determinada tiende a ocupar el volumen del recipiente que lo contiene.

Las características de los gases se han comprendido mejor a partir del siglo XIX, a medida que el hombre fue descubriendo y acumulando información que explica el porqué un gas tiende a ocupar un máximo de volumen y por qué, si la presión aumenta, su volumen disminuye si se conserva constante su temperatura.

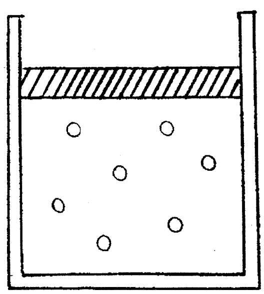
Este entendimiento de las características de los gases se fundamenta en la teoría cinético-molecular. Ahora se verán de manera somera las ideas principales de dicha teoría, para entender los fenómenos de compresibilidad y volumen en un gas.

Teoría cinético-molecular

a) Cualquier gas se encuentra formado por partículas diminutas, átomos o moléculas, mismos que se hallan separados por grandes espacios, si los comparamos con el tamaño de los elementos anteriores.

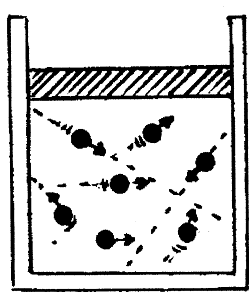


b) Todas las moléculas de un gas se encuentran en continuo movimiento, en todas direcciones, ocupando el volumen del recipiente que las contiene.



c) En las moléculas de un gas las fuerzas de atracción existentes son nulas.

d) Los choques de las moléculas entre sí o con las paredes del recipiente son perfectamente elásticos, dichos choques con el recipiente ocasionan la presión que ejerce el gas.



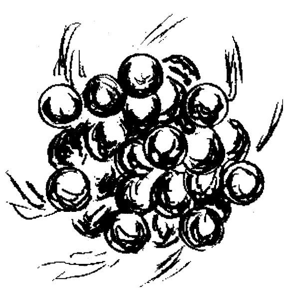
Estos puntos de la teoría cinético-molecular se deben cumplir, de lo contrario las moléculas del gas se desacelerarían, perdiendo sus características.

Del estudio de esta teoría se puede comprender por qué un gas no posee un volumen definido, es expandible, y susceptible de ser comprimido.

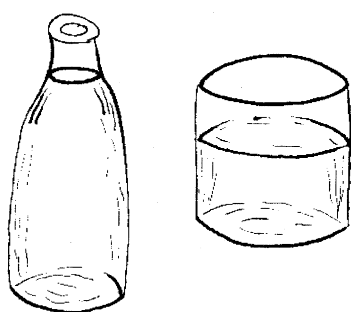
Cuando un gas se comprime sus moléculas se acercan entre sí y reducen sus espacios libres y en consecuencia las fuerzas de atracción aumentan, éstas pueden llegar a ser tan intensas como las fuerzas de repulsión, cuando estas fuerzas se igualan bajo una presión o disminución de la temperatura, el gas se transforma en líquido.

La teoría cinético-molecular también puede aplicarse al estudio de algunas características de los líquidos, como son el volumen y la compresibilidad. Los puntos de esta teoría aplicados para los gases, se utilizarán con pequeñas modificaciones para el estudio de los líquidos; así tenemos que:

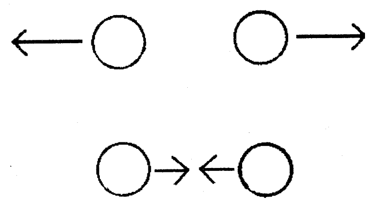
a) Todos los líquidos están constituidos por moléculas que se encuentran más próximas entre sí que en los gases.



b) Las moléculas de los líquidos **siempre se encuentran en continuo movimiento,** aunque no tan libre como el movimiento de las moléculas de un gas, pero suficiente para permitirles desplazarse unas sobre otras, adquiriendo la forma del recipiente que los contiene.

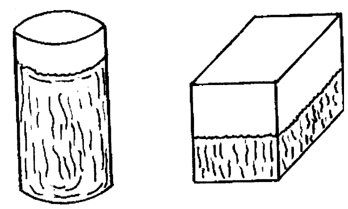


c) Las moléculas de los líquidos se ven sometidas a dos fuerzas equilibradas, que son las fuerzas de atracción y de repulsión. Las moléculas se atraen pero no con una fuerza que las mantenga unidas de una manera rígida.

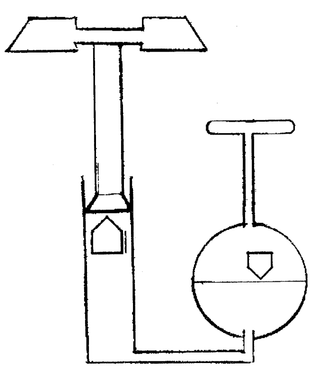


Bajo estos puntos se pueden comprender las características de volumen y compresibilidad para los líquidos.

Se dice que un líquido posee un volumen determinado porque sus moléculas como están en contacto siempre, no aumentan ni disminuyen sus espacios internos moleculares, lo que le da un volumen constante.



Por lo que respecta a la compresibilidad, los líquidos son prácticamente incompresibles cuando las moléculas se encuentran en contacto; bajo la presión de grandes fuerzas apenas se logra una compresibilidad mínima, característica que se aprovecha en el uso de la prensa hidráulica, y en el funcionamiento de los frenos hidráulicos de los vehículos. Para efectos prácticos a los líquidos se les puede considerar incompresibles.



Los líquidos son prácticamente incompresibles aún bajo grandes presiones.

PRESIÓN EN SÓLIDOS Y LÍQUIDOS

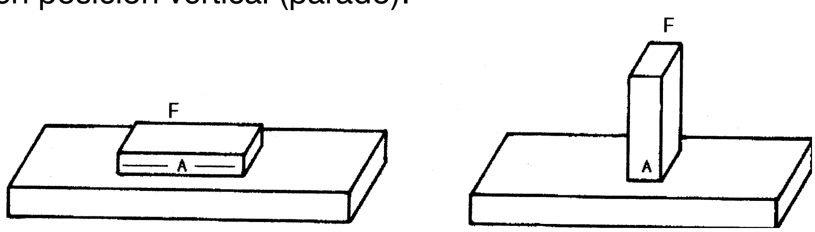
Corresponde a la sesión de GA 2.10 ¡QUÉ AGUANTE!

Pocas veces se piensa en la presión que ejerce la atmósfera sobre el cuerpo humano. Debido a esta presión los líquidos ingeridos y la sangre que corre por las venas, no brotan por los poros de la piel. Por otra parte, es posible introducir una tachuela en la pared con sólo presionarla un poco, pero no sucede lo mismo con un clavo, el cual necesita para introducirlo en la pared, un martillo, con el que al golpearlo, se ejercerá la presión necesaria para lograrlo.

Estos casos son ejemplos de cómo actúa la presión en los sólidos. Para comprender mejor este tema, es necesario que se defina qué es la presión y los elementos que la modifican.

Presión en sólidos

Si se considera un cuerpo sólido, por ejemplo un bote lleno de tierra o cemento, cuyo peso es igual a **F** y se coloca en un recipiente lleno de arena suave, se observa que en posición horizontal (acostado) se sume menos que si es colocado en posición vertical (parado).



Esto es debido a que, en el primer ejemplo, existe mayor superficie de contacto que en el segundo ejemplo, por tanto, se puede concluir que

- La presión aumenta al disminuir la superficie de apoyo.
- La presión disminuye al aumentar la superficie de apoyo.
- La presión está en relación directa con la fuerza que ejerce un cuerpo sobre una superficie determinada y en relación inversa al área sobre la que se ejerce esa fuerza.

La presión se puede representar matemáticamente como:

$P = \frac{F}{A}$ en donde

P = presión
F = fuerza
A = superficie

Unidades de presión

Las unidades de presión se obtienen relacionando las unidades de fuerza entre las unidades de superficie o área.

Fuerza	Superficie	Presión
N	m^2	$\frac{N}{m^2}$ = Pascal (Pa)

también será útil la siguiente igualdad:

$$1 \text{ kg} = 1 \text{ kg} \times 9.81 \frac{m}{s^2} = 9.81 \frac{kg \times m}{s^2} = 9.81 \text{ N}$$

es decir 1 kg = 9.81 N

Ejemplos

1. ¿Qué presión ejercerá una fuerza de 250 N sobre una superficie de 4 m^2?

Datos	Fórmula	Sustitución	Operaciones	Resultado
F = 2 50 N A = 4 m^2 P = ?	$P = \frac{F}{A}$	$P = \frac{250 \text{ N}}{4 \text{ m}^2}$	$\frac{250}{4} = 62.5$	$P = 62.5 \frac{N}{m^2}$ P = 62.5 Pa

2. Obsérvese qué sucede si manteniendo constante la fuerza se disminuye la superficie:

¿Qué presión ejercerá una fuerza de 250 N sobre una superficie de 2 m^2?

Datos	Fórmula	Sustitución	Operaciones	Resultado
F = 250 N A = 2 m^2 P = ?	$P = \frac{F}{A}$	$P = \frac{250 \text{ N}}{2 \text{ m}^2}$	$\frac{250}{2} = 125$	$P = 125 \frac{N}{m^2}$ P = 125 Pa

Obsérvese que la misma fuerza (250 N) aplicada a una superficie menor aumenta la presión.

3. Ahora véase lo que ocurre si se mantiene constante la fuerza y se aumenta la superficie.

¿Qué presión ejercerá una fuerza de 250 N sobre una superficie de 6 m^2?

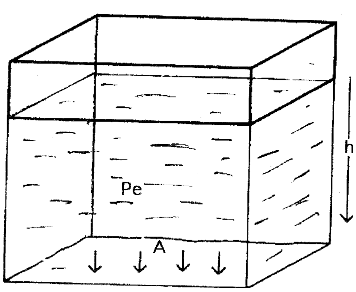
Datos	**Fórmula**	**Sustitución**	**Operaciones**	**Resultado**
$F = 250\ N$	$P = \frac{F}{A}$	$P = \frac{250\ N}{6\ m^2}$	$\frac{250}{6} = 41.66$	$P = 41.66\ \frac{N}{m^2}$
$A = 6\ m^2$				
$P = ?$				$P = 41.66\ Pa$

Nótese cómo en el segundo caso (2) la presión aumenta al disminuir la superficie de aplicación de la fuerza, y en el tercer caso (3) la presión disminuye al aumentar la superficie en la que se distribuye dicha fuerza.

Presión en los fluidos

La distribución del agua en las ciudades y en las casas, la construcción de submarinos y de accesorios para los deportes acuáticos, requieren del conocimiento sobre el comportamiento de la presión que ejercen los fluidos, y por ello deben diseñarse para resistir la presión correspondiente.

Recordando una característica de los fluidos que dice: “las fuerzas que ejerce un fluido son perpendiculares a las paredes del recipiente que lo contiene”, puede observarse que al perforar el recipiente, el líquido fluye rápidamente debido a que la presión ejercida es perpendicular a la pared. Esa fuerza o presión es producida por el peso del líquido y aumenta a mayor profundidad en el recipiente. En los gases se considera despreciable el peso de los mismos a una atmósfera de presión. El peso es la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre la masa de los cuerpos. Por lo que se puede calcular el peso de un cuerpo multiplicando su masa por la aceleración de la gravedad. Así se tiene que:



peso = masa x aceleración de la gravedad

$p = m \times g$

En el esquema se representa un recipiente, de área **A** y una altura **h**, con un líquido de peso específico **Pe**. El peso específico es el peso de la unidad de volumen de ese cuerpo. Se necesita calcular la presión que ejerce el líquido sobre el fondo del recipiente, para lo cual se tiene que:

de acuerdo con la definición de peso, se tiene que una fórmula para calcular el peso es:

$$p = Pe \times v \quad \text{.............} \ (1)$$

donde p = peso
Pe = peso específico
v = volumen

y si la fórmula para calcular el volumen es:

$$v = A \times h \quad \text{...............} \ (2)$$

donde v = volumen
A = área
h = altura

por lo tanto, sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$p = Pe \times A \times h \quad \text{.............} \ (3)$$

y si el peso es una fuerza, tenemos entonces que p = fuerza, y si la fórmula para calcular la presión es:

$$\text{Presión} = \frac{F}{A} \quad \text{............} \ (4)$$

Para calcular la presión en el fondo sólo hay que dividir la fuerza (p) entre la superficie.

sustituyendo (3) en (4) tenemos:

$$p = \frac{Pe \times A \times h}{A}$$

efectuando la división nos queda:

$$P = Pe \times h \text{ .... } (5)$$

que es la expresión que se usa para determinar la presión de un líquido en el fondo de un recipiente:

$$P = Pe \times h$$

en donde P = presión
Pe = peso específico
h = altura

Ejemplo:

Calcular la presión en el fondo de un lago cuya profundidad es de 15 m.

El peso específico del agua es $1.0 \frac{g}{cm^3} = 1\,000 \frac{kg}{m^3}$

Datos	**Fórmula**	**Sustitución**
$P = ?$ $Pe = 1\,000 \frac{kg}{cm^3}$ $h = 15\ m$	$P = pe \times h$	$p = 1\,000 \frac{kg}{m^3} \times 15\ m$

Operaciones	**Resultado**
$P = 15\,000 \frac{kg}{m^3} \times \frac{m}{} = 15\,000 \frac{kg}{m^2}$	$P = 1.5 \text{ X } 10^4 \frac{kg}{m^2}$

Para convertir las unidades de presión obtenidas $\frac{kg}{m^2}$ a pascales (Pa) se

realiza la siguiente operación:

$$1.5 \times 10^4 \frac{kg}{m^2} \times 9.8 \frac{N}{kg} = 14.7 \times 10^4 \frac{N}{m^2} = 1.47 \times 10^5 \frac{N}{m^2}$$

por lo que la presión expresada en pascales es 1.47×10^5 Pa.

NOTA: en estos cálculos no se consideró, para fines prácticos, la presión ejercida sobre el agua por la atmósfera.

DETERMINACIÓN DE LAS PROPIEDADES Y PRESIÓN DE LOS LÍQUIDOS

Corresponde a la sesión de GA 2.11 PARECIDOS PERO MUY DIFERENTES

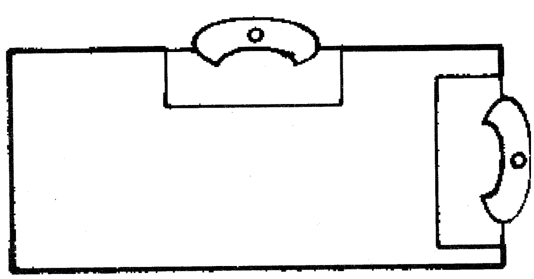
Fluidez

Una de las características de los líquidos se observa cuando llueve: el agua cae en gotas, lo que da origen a los pequeños o grandes chorros que forman posteriormente las corrientes de agua que van a dar a los arroyos y ríos, y a su vez éstos aumentan los caudales de las presas, lagos o mares; se dice que el agua fluye con rapidez. Si no existen mareas o viento se puede observar que la superficie del líquido es plana y horizontal.

Es importante notar que los campos de riego se construyen aprovechando los diferentes niveles del terreno, y el depósito o represa se sitúa en la parte más alta para que fluya el agua con mayor rapidez.

Superficie de un líquido

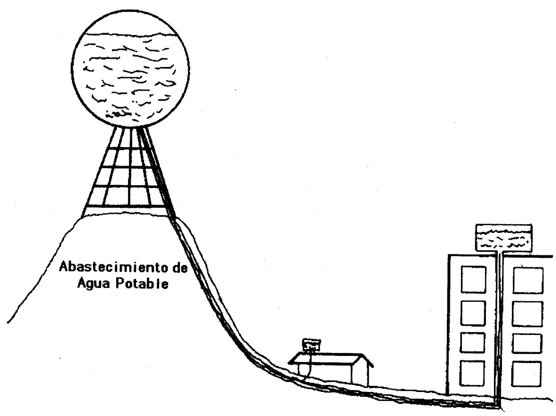
Al construir una casa o colocar un piso, se constata que las paredes y el piso queden verticales y horizontales, respectivamente, para evitar desniveles de fatales consecuencias. Los albañiles aprovechan una propiedad de los líquidos que se manifiesta en su superficie, la cual es plana y horizontal, para ello utilizan dos dispositivos: uno llamado nivel, el cual puede ser de madera o metal, que tiene hasta en tres de sus caras pequeños tubos con cápsulas curvas inyectadas con un líquido y una burbuja de aire que se mueve al presentarse un desnivel, y queda dentro de las marcas cuando se presenta la verticalidad u horizontalidad deseadas.



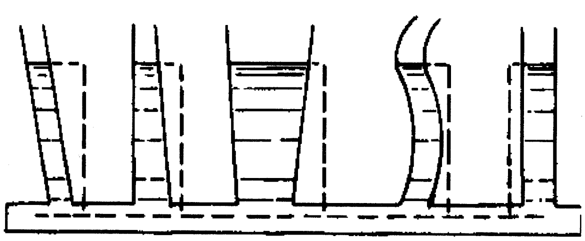
NIVEL

El otro dispositivo se construye con una manguera translúcida y agua, la cual indica el mismo nivel en los extremos, sin importar que tan irregular sea el terreno a nivelar, el único requisito es que coincidan en un punto señalado, porque la superficie del líquido es plana y horizontal.

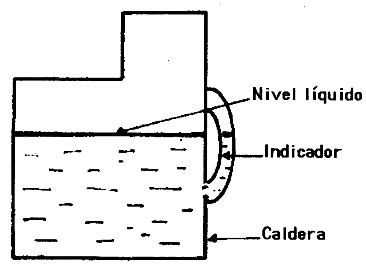
Para la distribución del agua en una población o en una casa, se utiliza el principio de los vasos comunicantes: la instalación del depósito principal se realiza en la parte más alta del terreno o en la azotea de la casa para que el agua se distribuya por la diferencia de niveles.



Cuando los recipientes que contienen un líquido se comunican entre sí, presentan una superficie plana, horizontal y colocados a la misma altura, sin importar su forma y capacidad, esto se aprovecha en la instalación de tinacos para el almacenamiento de agua o bien en depósitos de gasolina o petróleo.



VASOS COMUNICANTES



Presión en un líquido

La presión que ejerce un líquido en el fondo de un recipiente varía con la profundidad, a mayor profundidad mayor presión, a menor profundidad menor presión; esto sin considerar la presión ejercida por la atmósfera, que comparada con la del agua a mayores profundidades es mínima. Esta es la razón por la cual el hombre no puede bajar a niveles profundos en los océanos.

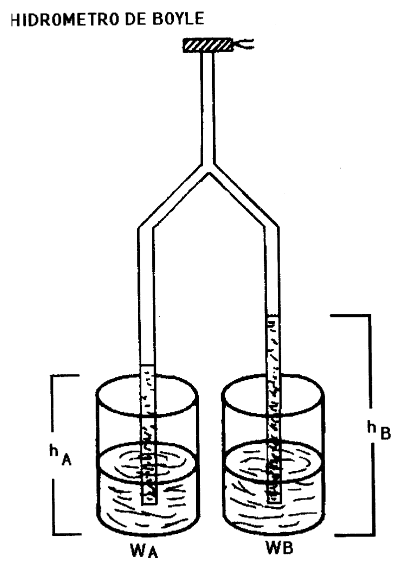
Debido a que la presión aumenta considerablemente con la profundidad, el hombre ha tenido que construir diversos aparatos y dispositivos, como el submarino, para poder explorar los océanos y otros lugares en los que se tenga que sumergir en grandes profundidades marinas.

Hidrómetro de Boyle

El hidrómetro de Boyle nos permite determinar el peso específico de los líquidos y se construye aprovechando la presión que ejercen los líquidos en el fondo de un recipiente.

$$P = pe \times h$$

El hidrómetro es un tubo en forma de "y", cuyos extremos paralelos se introducen en dos recipientes distintos, con líquidos diferentes, generalmente uno contiene agua y su peso específico es de 1 g/cm^3 y el otro, el líquido del cual se desconoce dicho peso. Para poder determinarlo es necesario succionar por el extremo superior, para que asciendan ambos líquidos. Podrá notarse que ambos líquidos ascienden, pero estacionándose a diferentes alturas.



A continuación se anotan las alturas alcanzadas por los líquidos en los dos tubos.

Puesto que ambos líquidos se hicieron subir aplicando la misma fuerza, se puede suponer que la presión que ejercen en el fondo de los recipientes es la misma. Entonces, ¿a qué se debe la diferencia entre las alturas alcanzadas por dichos líquidos?, la respuesta teórica puede ser: a que presentan diferente peso específico, esto se puede demostrar con el siguiente razonamiento:

La fórmula para calcular la presión de un líquido, si se conoce su altura, es:

$$\boxed{P = Pe \times h}$$

La fuerza que se aplicó al succionar ambos líquidos es igual, por tanto, la presión que ambos ejercen sobre el fondo del recipiente será la misma, debido a ello:

$$\boxed{P_A = P_B}$$

donde $\mathbf{P_A}$ será la presión ejercida por el líquido del cual se desconoce su peso específico y $\mathbf{P_B}$ es la presión ejercida por el agua, por lo que:

$$\boxed{Pe_A \times h_A = Pe_B \times h_B}$$

entonces, despejando Pe_A, nos queda:

$Pe_A = \dfrac{Pe_B \times h_B}{h_A}$ y si $Pe_B = 1 \text{ g/cm}^3$, entonces:

$Pe_A = \dfrac{h_B}{h_A}$ para calcular el peso específico desconocido.

donde:

h_B = altura del agua.

h_A = altura del otro líquido.

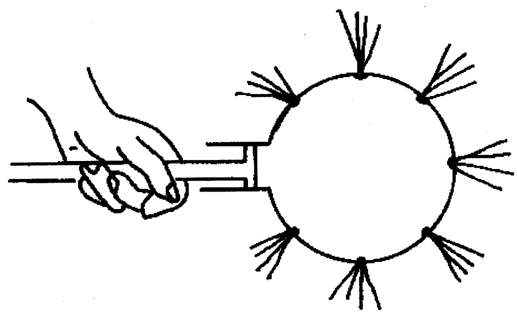
PRINCIPIO DE PASCAL

Corresponde a la sesión de GA 2.12 CERCA O LEJOS

A cualquier parte donde se vaya, sobre la superficie de la Tierra siempre habrá aire, ¡por fortuna!, esto se debe a que los fluidos tienden a ocupar los recipientes que los contienen y el aire es un fluido. Lo mismo sucede en los océanos, lagos, albercas, mientras se esté en ese espacio se encontrará agua.

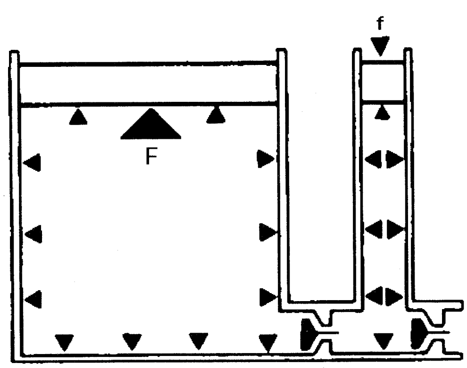
Ahora bien, se recordará que los líquidos ejercen una presión en las paredes del recipiente que los contiene; Blas Pascal observó el comportamiento de los fluidos y señaló que “un fluido encerrado en un recipiente al aplicarle una presión, dicha presión se transmite en todos sentidos y direcciones”. Para comprobarlo utilizó la llamada jeringa de Pascal, que es un aparato de vidrio constituido por una esfera perforada con un émbolo, la cual se llena con agua y al aplicar una presión al émbolo, el líquido sale disparado en todos sentidos y direcciones.

Esta propiedad se utiliza en el riego por aspersión.



Cuando este principio se aplica a dos columnas de líquido comunicadas entre sí, da lugar a la llamada prensa hidráulica, la cual aprovecha para su funcionamiento que los líquidos transmitan la presión en todos sentidos y direcciones.

La prensa hidráulica tiene dos émbolos que tienen la misma presión. Para obtener una ventaja práctica de este dispositivo pueden modificarse las áreas de los émbolos que la forman.



Prensa Hidráulica $F = \frac{f \times a}{A}$

Se llamará (S) al émbolo de mayor área y (s) al de menor. Si la presión se transmite íntegra en todas direcciones y sentidos, entonces la presión ejercida en ambos émbolos será igual, por lo tanto:

la presión en el émbolo menor será $P_1 = \frac{F_1}{A_1}$

y la presión en el émbolo mayor será $P^2 = \frac{F_2}{A_2}$ entonces $P_1 = P_2$ sustituyendo, queda:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

que es, la expresión matemática que se utiliza para calcular la presión en una prensa hidráulica.

En la actualidad, la aplicación de la prensa hidráulica es extensa, utilizada por ejemplo, en los empacadores de algodón, en los elevadores de las gasolineras, en los gatos hidráulicos, en los frenos hidráulicos o en las troqueladoras, esto permite que con una fuerza pequeña, como por ejemplo, pisar el freno de un trailer para detenerlo con sólo accionar una palanca, troquelar pijas metálicas, hebillas, estoperoles, etc. Además, la prensa hidráulica puede ser usada como una máquina simple y su ventaja se observa en el siguiente ejemplo:

Los émbolos de una prensa hidráulica tienen áreas de 6×10^{-4} m^2 y$^3 \times 10^{-2}$ m^2 ¿Qué fuerza puede elevarse por el cilindro mayor si se le aplica una fuerza de 117.72 N al cilindro menor?

Datos

$A_1 = 6 \times 10^{-4}$ m^2

$A_2 = 3 \times 10^{-2}$ m^2

$F_2 =$ N

$F_1 = 117.72$ N

Fórmula

$$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1}$$

$$F_2 = \frac{A_2 \times F_1}{A_1}$$

Sustitución

$$F_2 = \frac{3 \times 10^{-2} \times 117.72 \text{ N}}{6 \times 10^{-4} \text{ m}^2}$$

Resultado

$F_2 = 58.86 \times 10^2$ N

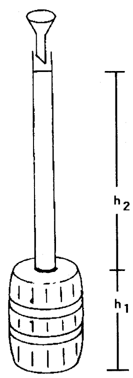
Para convertir las unidades expresadas en newtons a kilogramos fuerza se divide el resultado entre 9.81 m/s^2 masa que se puede elevar en el émbolo mayor

$$\frac{58.86 \times 10^2 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2}$$

$$F_2 = 6 \times 10^2 \text{ kg} = 600 \text{ kg}$$

La ventaja de la prensa hidráulica estriba en que se obtiene una multiplicación de la fuerza aplicada proporcional al cociente de las áreas de los émbolos multiplicados por la fuerza.

Tonel de Pascal



TONEL DE PASCAL

Existe un dispositivo llamado tonel de Pascal, el cual permite comprobar cómo se incrementa la presión de un líquido encerrado en un recipiente, conforme aumenta su altura. Consiste en un barril de madera en el que se coloca un tubo de diámetro pequeño de una longitud mayor de 8 m de altura. Se llena el barril con agua y con un embudo se introduce la mayor cantidad de agua por el tubo. El barril no se rompe por la cantidad de agua que contiene sino por la presión que se incrementa al aumentar la altura del líquido.

FLOTACIÓN Y PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

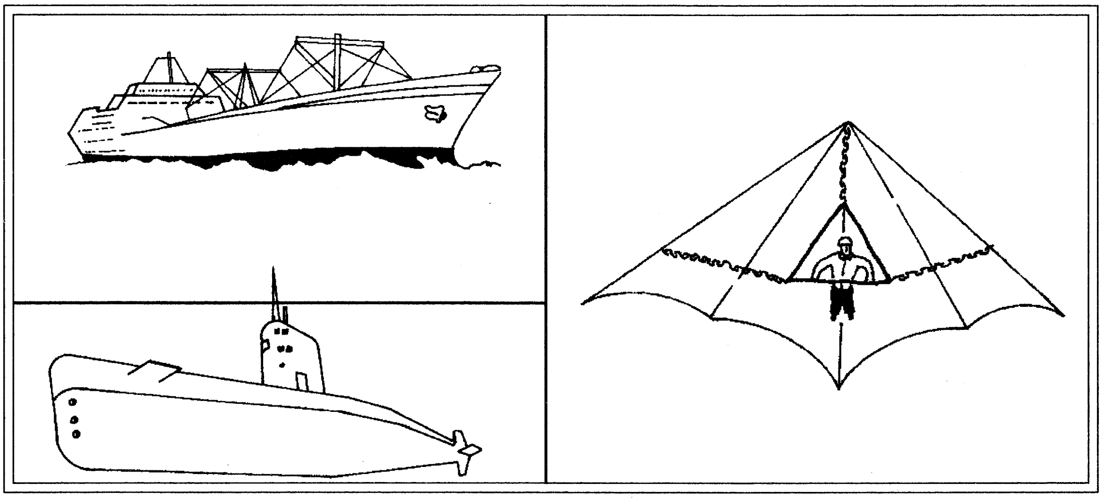
Corresponde a la sesión de GA 2.13 ¡EUREKA!

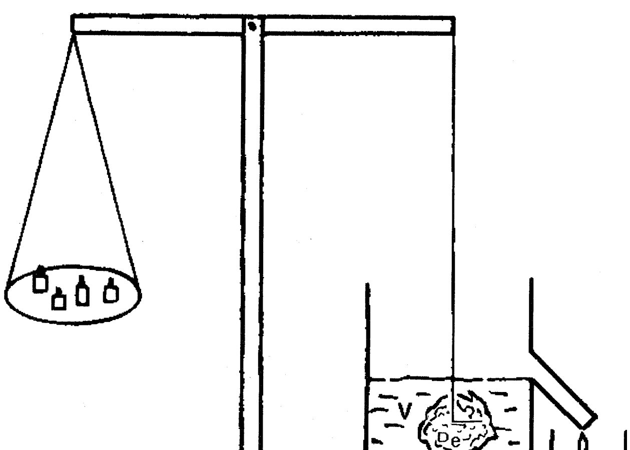
¿Cómo es posible que un avión de gran tamaño sea más seguro que uno pequeño?, y ¿cómo es que un barco entre mayor sea su tamaño tiene menor posibilidad de naufragar?

Arquímedes en el siglo III de n.e., descubre al estarse bañando en su tina y al sumergir sus piernas en el agua, que éstas aparentemente perdían peso y podía moverlas con facilidad, su entusiasmo fue tan grande que salió gritando ¡EUREKA!, que significa lo encontré. Esta observación le permitió determinar el peso específico de los cuerpos y con ello resolver el problema que le habían planteado en torno a la pureza de una corona de oro. Este principio que lleva su nombre responde a las preguntas anteriores y otras cuestiones más y se expresa de la siguiente manera: “Todo cuerpo sumergido en un fluido recibe un empuje vertical hacia arriba, igual al peso del líquido desalojado”.

Principio en el cual está basada la navegación marítima y aérea.

Esto es fácil de comprobar, si se coloca en una cubeta con agua un trozo de madera se observará que flota, o si se quiere sumergir, se tendrá que hacer fuerza empujando la madera hacia abajo, hacia el fondo de la cubeta, lo cual quiere decir que la madera está recibiendo un empuje vertical hacia arriba, que es el que se ha vencido al empujar el trozo de madera.





En la actualidad el valor del empuje puede ser medido por medio de la balanza hidrostática, la cual consta de dos platillos en equilibrio, uno de ellos es más corto que el otro. El platillo corto tiene un pequeño gancho donde se pueden colgar diferentes objetos. Para usarla se necesita un marco de pesas y dos vasos de diferentes tamaños, el vaso mayor deberá tener un pequeño pico por donde se pueda verter el agua al derramarse;

cuando se introduce un cuerpo en el vaso se desaloja una cantidad de agua que será recogida en el vaso pequeño, cuyo volumen tratándose del agua, será igual al peso del líquido y éste, igual al valor del empuje.

Recordar que 1 cm^3 de agua pesa 1 g.

Las unidades de empuje son unidades de fuerza.

Para calcular el empuje conociendo el volumen del cuerpo y el peso específico del líquido, se utiliza la fórmula:

$$\boxed{E = Pe \times V \text{ .... } (1)}$$

Si el peso específico es la relación entre el peso del cuerpo y su volumen:

p = peso
v = volumen
Pe = peso específico

$$Pe = \frac{P}{V} \quad (2)$$

Y si la densidad es $\rho = \frac{m}{v}$ (3) , despejando v, nos queda: $V = \frac{m}{\rho}$ (4)

ahora si P = m x g (5), y si las fórmulas (4) y (5) las sustituimos en la (2) nos queda:

$$Pe = \frac{P}{V} = \frac{m \times g}{\frac{m}{\rho}} = \frac{m \times g \times \rho}{m} = g \times \rho \ (6)$$

Sustituyendo Pe = g x f (6) en la fórmula (1) tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} E = Pe \times V \ (1) \\ E = g \times \rho \times V \ (7) \end{array}}$$

Entonces, conociendo la densidad del líquido, el volumen del cuerpo y la aceleración de la gravedad, se obtiene el empuje del líquido.

	Masa Específica Kg/dm^3
Acero	7.6 – 7.8
Aluminio	2.70
Bronce	8.4 – 8.7
Cobre	8.89
Corcho	0.22 – 0.26
Ebonita	1.15
Hielo	0.917
Hierro colado	7.0 – 7.7
Hierro forjado	7.8 – 7.9
Parafina	0.87 – 0.9
Plomo	11.34
Vidrio (crown)	2.4 – 2.8
Vidrio (flint)	2.9 – 5.9
Zinc	7.14

	Densidad a 0 °C $\frac{kg}{dm^3}$
Agua	1.000
Alcohol de grano	0.807
Alcohol de madera	0.80
Amoniaco	...
Disulfuro de carbono	1.293
Eter	0.736
Gasolina	0.66 – 0.69
Mercurio	13.546
Trementina	0.873

	Densidad a 0 °C y 760 Torr $\frac{kg}{dm^3}$
Aire	0.001 293
Argón	0.001 784
CO_3	0.001 977
Helio	0.000 178 4
Hidrógeno	0.000 089 88
Nitrógeno	0.001 251
N_2O	0.001 978
Oxígeno	0.001 429
SO_3	0.002 930

Las unidades de Pe pueden ser:

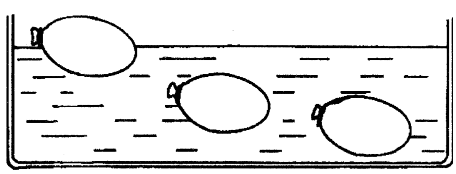
$$\frac{N}{m^3} \qquad \frac{kg}{m^3} \qquad \frac{g}{cm^3} \qquad \frac{kg}{cm^3}$$

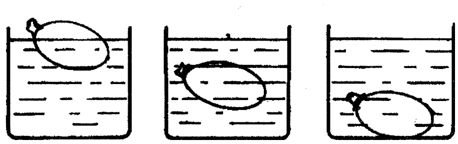
El aparato para medir el peso específico de un líquido se llama densímetro.

PRÁCTICA DE FLOTACIÓN

Corresponde a la sesión de GA 2.14 ARRIBA O ABAJO

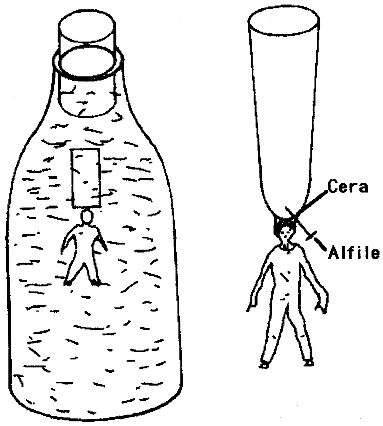
Una de las aplicaciones diarias del principio de Arquímedes la realizan los comerciantes y las amas de casa para comprobar si las verduras o los huevos se encuentran en buen estado, para ello usan una cubeta con agua, en donde los sumergen, y si dichos productos flotan, se rechazan, pues esto indica que están descompuestos o que inician su descomposición.





La grata sensación de flotar o nadar en un río, lago o alberca se hace con mayor facilidad en el mar donde la densidad del agua es mayor.

El fenómeno de flotación se presenta cuando existen entre los cuerpos densidades distintas. Así, el ser humano tiene generalmente un peso específico menor que 1 g/cm^3 debido a lo cual puede flotar.

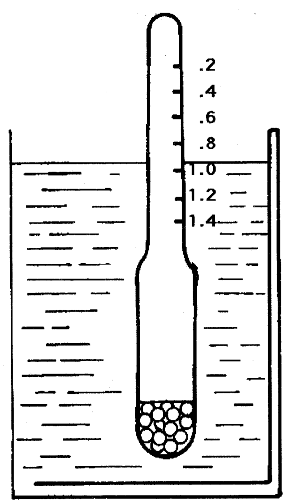


Diablillo de Descartes

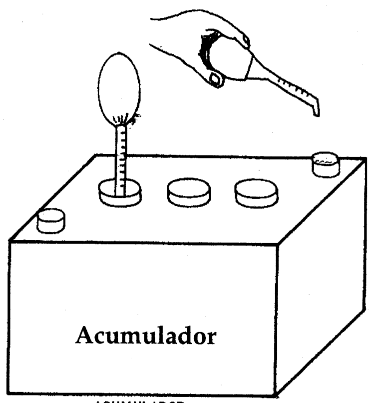
Los submarinos se construyen de tal manera que su peso específico sea menor que 1 g/cm^3, esto se logra llenando sus tanques de flotamiento con aire; para que adquieran un peso mayor se expulsa el aire y se llenan con agua de mar, aumentando con ello su peso específico para poder sumergirse. Este principio se aplica en el Diablillo de Descartes, experimento que realizaste en las sesiones anteriores.

Los aerómetros y densímetros son aparatos basados en el principio de Arquímedes, constan de un tubo hueco con lastre en uno de sus extremos; el densímetro se sumerge en el líquido objeto de la medición.

Los densímetros tienen una escala vertical graduada en la cual se lee directamente la densidad de los líquidos, las escalas están hechas para determinar las densidades de los diferentes líquidos y de acuerdo a eso reciben sus nombres que pueden ser: pesaácidos, pesasales, alcoholímetros.



Quizá se haya observado cómo se mide el ácido de un acumulador para saber si la acidez de cada celda es la correcta para su funcionamiento. Al introducir el densímetro el nivel de la escala indica la densidad y con ello la concentración del ácido en el líquido, lo cual sirve al técnico para determinar el funcionamiento del acumulador.



ACUMULADOR

Asimismo, en los gases se puede constatar el principio de Arquímedes, razón por la que se ha podido desarrollar la navegación aérea, primero en los globos aerostáticos y luego en los aviones. El calentamiento de la atmósfera se lleva a cabo gracias a la diferencia de densidad del aire que sube las capas calientes y baja las capas frías, esto ayuda grandemente a los amantes del deporte de los planeadores.

PRESIÓN ATMOSFÉRICA Y VACÍO

Corresponde a la sesión de GA 2.15 NADA DE NADA

En la actualidad, el fenómeno de la presión atmosférica es conocido y puede definirse como la fuerza que ejerce la atmósfera sobre cualquier cuerpo o superficie con la que esté en contacto. La atmósfera está constituida por una mezcla de gases, los cuales tienen masa y por lo tanto son atraídos por la Tierra, con una fuerza que es igual a su peso.

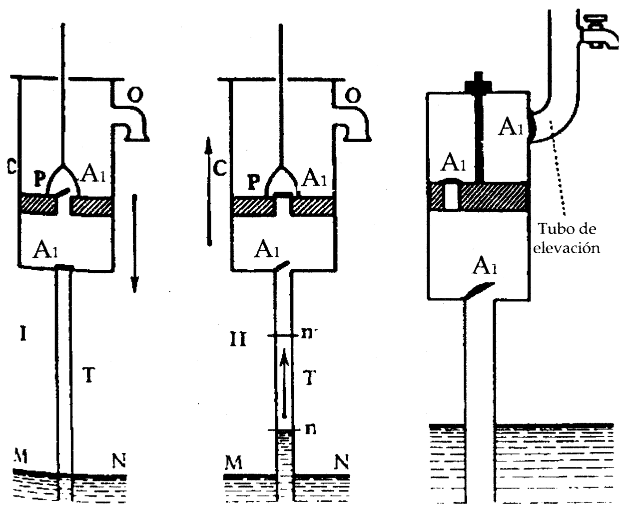
1 m^3 de aire a 0 °C y a nivel del mar pesa 1.2928 kg, es decir, su densidad será de 1.2928 kg/m^3.

Sin embargo, en el siglo XVII, no se conocían los efectos de la presión atmosférica, no obstante que se había demostrado que el aire tenía peso. Al utilizar una bomba aspirante para sacar agua de un pozo, ésta funcionaba bien cuando la altura del pozo no era mayor de 10 m: la bomba funcionaba creando un vacío, el cual, al abrirse la válvula del pistón, era ocupado inmediatamente por el agua. Se decía que la naturaleza tenía horror al vacío, y que el agua cumplía con esta creencia, cubriéndolo inmediatamente.

El hecho de que no se cumpliera esta “creencia”, por supuesto errónea, más allá de los 10 m, llamó la atención de Galileo y su discípulo Torricelli, siendo este último el que, por medio de varias experiencias, dio con la respuesta.

Torricelli utilizó para sus experiencias mercurio en vez de agua, de esta manera los tubos no tendrían que ser tan altos, ya que el mercurio es aproximadamente 13 veces más “pesado” que el agua.

Usó tubos de 1 m de longitud aproximadamente, cerrados por uno de sus extremos. En un recipiente colocó mercurio, con el que llenó también uno de los tubos, tapó la boca del tubo lleno y lo invirtió, introduciéndolo en el recipiente. El esperaba que todo el mercurio descendiera, sin embargo, esto no sucedió, el mercurio descendió solamente hasta un nivel, que medía desde la superficie de mercurio del recipiente, hasta la parte más alta de la columna, aproximadamente 76 cm.



En la parte del tubo, por donde había descendido el mercurio, se formó un vacío, el cual no era llenado por el mercurio nuevamente y si el tubo no se sacaba del recipiente, éste permanecía sin alterarse.

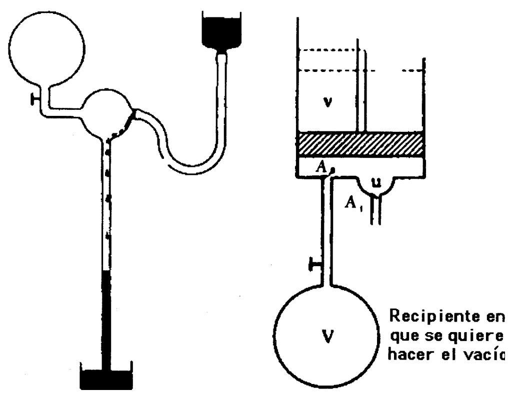
Volviendo al vacío que se formaba en el tubo, éste no era total, existían en él moléculas de vapor de agua y de mercurio. Actualmente se dice que el vacío es la ausencia total de aire.

Al tratar de demostrar la existencia del vacío, Torricelli ayudó, entre otras cosas, a la comprensión del efecto de la presión atmosférica sobre los cuerpos.

Se han realizado muchos experimentos en el espacio exterior, en donde el vacío es casi total. Se ha probado que la 1a. Ley de Newton es válida, ya que si un cuerpo es puesto en movimiento éste no se detiene, si está girando continúa indefinidamente sus giros, ya que no existe rozamiento con el aire, elemento que sería una de las causas para detenerlo. Si se deja caer una pluma de unos cuantos gramos de peso y una pesa de plomo de 1 kg, al vacío, ambos caerán a la misma velocidad.

Si una persona se expusiera al vacío, sufriría una serie de trastornos: al principio la falta de oxígeno le provocaría asfixia; sus pulmones, al no estar bajo la presión atmosférica, se expandirían hasta reventar, lo mismo que su piel y otros órganos. Es por ello que los astronautas llevan un equipo que los somete a una presión parecida a la atmosférica cuando salen al espacio.

Existen muchos aparatos tanto para crear vacío como para comprimir el aire. Ambos dispositivos se utilizan mucho en la industria y los laboratorios. Para bajar la temperatura de ebullición de los líquidos éstos se hierven al vacío. En la fabricación de cerámica, en herramientas neumáticas, como la pistola de aire y en la bomba de flit también se aplica el conocimiento sobre el vacío. Las bombas al vacío son tan eficaces que pueden disminuir la presión atmosférica hasta en 0.000 001 mm Hg.



Los líquidos ejercen una presión proporcional a la altura que éstos tengan en el recipiente que los contiene.

El mercurio, como líquido, ejercerá una presión que se calcula de la siguiente manera: la altura que alcanzó el mercurio fue de 76 cm. Al repetir la experiencia, con tubos de diferente diámetro, se comprobó que la altura que alcanzaba el mercurio era la misma, 76 cm.

Si su densidad es de 13.6 $\frac{g}{cm^3}$ y el diámetro del tubo es de 1 cm^2,

entonces, aplicando la fórmula:

Presión = Pe x h,

Tenemos: $\boxed{\text{Presión} = \text{Pe} \times \text{h}}$

Presión = 13.6 $\frac{g}{cm^3}$ x 76 cm = 1 033.6

sus unidades serán:

$$\text{Presión} \quad \frac{g}{cm^3} \times \frac{cm}{1} = \frac{g}{cm^2}$$

Presión = 1033.6 $\frac{g}{cm^2}$

Esta es la presión que ejerce la atmósfera en cada cm^2 de superficie de los cuerpos situados a nivel del mar. Si esta presión no existiera, los cuerpos se fragmentarían en mil pedazos, lo cual sería inevitable y fatal para el caso del cuerpo humano, si se encuentra alejado del efecto de la presión atmosférica, es decir, en el vacío.

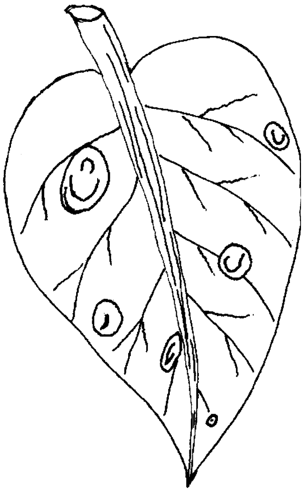
COHESIÓN Y ADHESIÓN

Corresponde a la sesión de GA 2.16 ¿QUÉ NOS UNE?

La teoría cinética molecular explica el comportamiento de las sustancias, en función del tamaño de las partículas, la distancia entre ellas, el tipo de movimiento y la cantidad de energía cinética que tienen.

Tanto para los gases, líquidos y sólidos esta teoría, con ciertas modificaciones, se cumple.

Así, en los gases, la separación entre sus moléculas es muy grande; en cambio, en los líquidos y sólidos la cercanía de sus moléculas es mayor, por lo que se manifiestan entre ellas fuerzas de atracción y repulsión, que en el caso de los líquidos son casi iguales, por lo que sus moléculas giran o se deslizan unas sobre otras; en los sólidos las fuerzas de atracción son mayores que las



de repulsión, lo que hace que las moléculas vibren sobre su eje, permaneciendo en un mismo lugar.

A la fuerza de atracción que mantiene unidas a las moléculas de un cuerpo se le llama **cohesión.**

Se puede decir que la resistencia que presenta un cuerpo a ser fragmentado se debe a la fuerza de cohesión entre sus moléculas.

En los líquidos esta fuerza de cohesión se manifiesta de otra forma: si se intenta partir un líquido no se podrá, ya que sus moléculas al estar girando o deslizándose unas sobre otras, inmediatamente cubrirán la incisión que se haya hecho en su superficie; sin embargo, si el líquido se vierte sobre una superficie plana, tenderá a ocuparla, a la vez que permanece unido, sin dispersarse, poniéndose de manifiesto en ese momento, la fuerza de cohesión entre sus moléculas.

¿Qué sucede entre las moléculas del líquido y las del recipiente?

¿Existen fuerzas de atracción entre ellas? La respuesta es sí. A la fuerza de atracción entre moléculas diferentes se le llama **adhesión.**

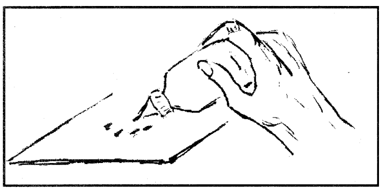
Esto se comprueba cuando se introduce un objeto sólido en un líquido, al momento de sacarlo se observa que está mojado y que a su vez puede llevar hasta unas gotas unidas a él.

Si se ponen en contacto dos vasos iguales previamente humedecidos, de tal manera que la base de uno de ellos embone en la boca del otro, y si se giran un poco, se presentará una adhesión entre ellos y el agua, que hará muy difícil la separación.

Lo cual quiere decir que entre el vidrio y el agua existe una gran fuerza de adhesión.

¿Qué sucede cuando se trata de unir agua y aceite? ¿Por qué no se unen? A partir de los planteamientos antes señalados, se puede decir que cuando estos líquidos se encuentran en contacto, es mayor la fuerza de cohesión entre sus moléculas que la de adhesión entre ellas, por lo que no se unen.

Una sustancia que tiene gran fuerza de adhesión con el papel, la madera o la tela es el pegamento blanco. Con una pequeña capa de pegamento, el papel se adhiere fuertemente a la superficie en la que se pegó (siempre y cuando ésta sea de papel, madera o tela). Lo anterior se puede explicar porque el pegamento se introduce entre los poros de estos materiales reforzando así la fuerza de adhesión entre ellos.



Actualmente existen pegamentos muy fuertes que son capaces de unir por adhesión plástico, vidrio o metal.

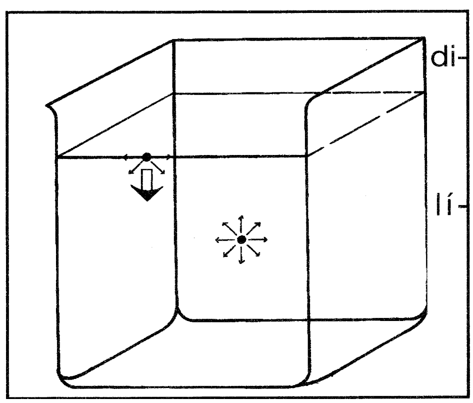
TENSIÓN SUPERFICIAL Y CAPILARIDAD

Corresponde a la sesión de GA 2.17 ¿QUÉ SE ROMPE?

Tensión superficial

Los líquidos presentan un fenómeno muy peculiar en la superficie que está en contacto con el aire. Las moléculas que se ubican en la superficie no se encuentran sometidas a las mismas fuerzas de cohesión que las moléculas que se hallan enmedio del líquido; esto se observa en la figura, en la cual se ilustran las fuerzas de cohesión a las que se encuentran sometidas tanto una molécula en el seno de un líquido, como una molécula que está en la superficie.

Sobre la molécula **B**, que se encuentra en el seno del líquido, actúan las fuerzas de cohesión de todas las moléculas que la rodean; estas fuerzas se ejercen en todas reacciones y la suma vectorial de estas fuerzas equilibradas es igual a cero.

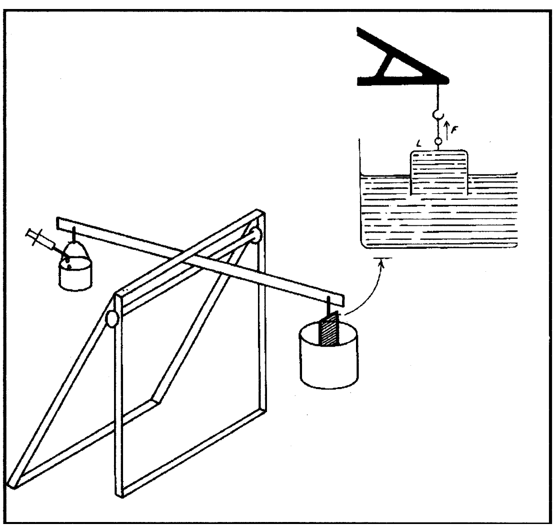


La molécula **A**, que está en la superficie del líquido, presenta un sistema desequilibrado de fuerzas, ya que es sometida a las fuerzas de cohesión de las moléculas que se encuentran a su lado y por debajo de ella; la suma vectorial de estas fuerzas es una resultante que va hacia el interior del líquido, perpendicular a la superficie. Este desequilibrio en las fuerzas de cohesión que se presenta en las moléculas de la superficie de un líquido, da como resultado el fenómeno llamado tensión superficial; este fenómeno consiste en la formación de una especie de membrana elástica, formada por las moléculas que se encuentran en la superficie. La **tensión superficial** se define como la fuerza tangenciai a la superficie de un líquido, que se ejerce en un centímetro de ésta.

Es gracias a ese fenómeno que muchos de los insectos se pueden posar sobre el agua sin hundirse; también debido a ello se forman pompas de jabón o puede ser posible la flotación de una aguja o navaja de rasurar engrasadas, etcétera.

Asimismo, por el fenómeno de tensión superficial, los líquidos tienden a disminuir su superficie libre lo más posible; un líquido, cuando no es sometido a fuerzas exteriores (como la fuerza de gravedad), tiende a adoptar una forma esférica. Los líquidos, que observan más capacidad para adoptar esta forma, son los que presentan una mayor tensión superficial; un ejemplo es el mercurio. Ya se mencionó que, la resultante de las fuerzas de cohesión que actúa sobre las moléculas de la superficie, es una fuerza que se dirige hacia el interior del líquido de forma perpendicular a su superficie; si la masa del líquido es muy pequeña, entonces lo que se forma es una esfera.

Una forma sencilla empleada para comprobar la tendencia de los líquidos a formar esferas, se realiza de la siguiente manera: en un vaso con agua y alcohol metílico (alcohol de madera), ambas sustancias mezcladas en la misma cantidad, se deja caer una gota de aceite de olivo. La gota se hunde entonces hasta el límite de la mezcla alcohol-agua manteniéndose en forma de esfera, y ahí queda flotando, ya que es más densa que el alcohol pero menos que el agua.



La tensión superficial de un líquido se puede medir de manera aceptable mediante el sencillo dispositivo que se muestra en la figura.

Para realizar la medición de la tensión superficial por medio del dispositivo, el marco de alambre se sumerge en el agua; en el platillo que se encuentra del otro lado del brazo, se agrega agua con una jeringa graduada (gota a gota); conforme el alambre salga del líquido, se observará una película que se habrá formado entre las paredes de éste; se sigue agregando agua (poco a poco) al platillo, hasta que se rompa la película del alambre. Como la jeringa está graduada, se sabrá cuántos cm^3 se le pusieron al platillo; con este dato se puede calcular la fuerza requerida para romper la tensión superficial del líquido, que será la misma fuerza con la que se rompa la película que se formó en el alambre.

Tensión superficial de algunos líquidos	
Líquido	**T N/m**
Agua	75×10^{-3}
Aceite de O.	32×10^{-3}
Alcohol	23×10^{-3}
Trementina	27×10^{-3}
Mercurio	547×10^{-3}

Capilaridad

Ya se mencionó que una de las fuerzas que existen entre las moléculas de un líquido se llama cohesión, y que es la responsable de la tensión superficial; ahora veremos uno de los efectos de la **fuerza de adhesión.** Esta fuerza se da entre las moléculas del líquido y las moléculas del recipiente que lo contiene, o sobre cualquier superficie que entre en contacto con él; dando lugar a lo que se conoce como **capilaridad,** que es el ascenso o descenso de un líquido que se desliza a lo largo de un tubo capilar. Por lo general el tubo capilar tiene apenas el diámetro de un cabello, aunque este fenómeno también se presenta en tubos con diámetro de 2.5 cm.

De esta relación de fuerzas puede obtenerse cualquiera de los dos resultados siguientes:

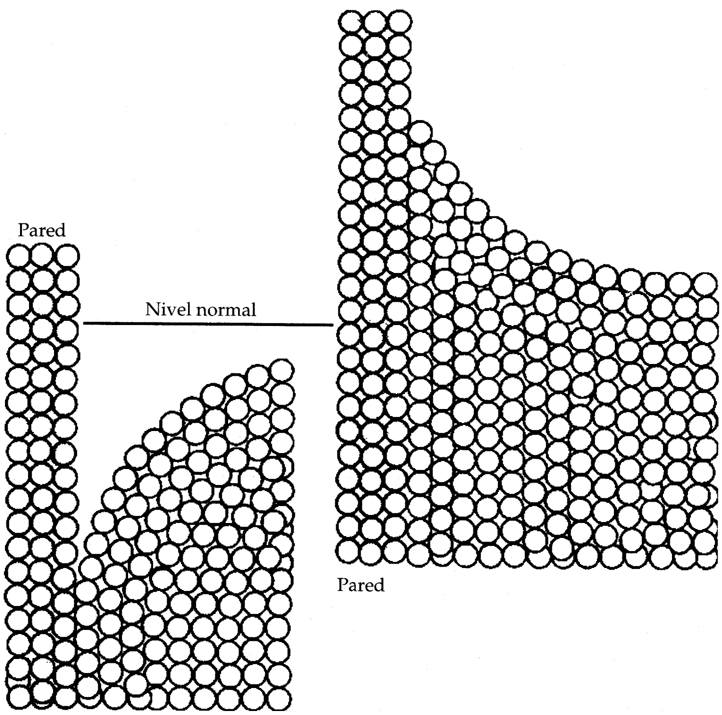
Tabla tomada de Mosqueira, Alejandro, *Física general*, México, Patria, 1991.

1. Las moléculas del líquido presentan mayor atracción por las moléculas del recipiente, que ellas entre sí. Cuando esto ocurre, significa que la fuerza de cohesión entre dos moléculas del líquido es menor que la fuerza de adhesión, entre una molécula del líquido y una molécula del recipiente.

   Al ocurrir este fenómeno, la superficie del líquido adquiere la forma de <u>menisco cóncavo</u>, y se dice que el líquido sí moja las paredes del recipiente.

2. Las moléculas del líquido presentan mayor atracción entre sí que hacia las moléculas del recipiente. Esto es: la fuerza de cohesión entre dos moléculas del líquido es mayor que la fuerza de adhesión entre una molécula del líquido y una molécula del recipiente.

   Cuando se da este fenómeno, la superficie del líquido adquiere la forma de <u>menisco convexo</u>, y se dice que el líquido **no** moja las paredes del recipiente.



Una sustancia que se comporta como en el primer caso —cuando se dice que el líquido moja o humedece las paredes del recipiente—, es el agua. Por otro lado, el mercurio se comporta como en el segundo caso, cuando se menciona que el líquido no moja o humedece las paredes del recipiente.

Si se introduce un tubo (capilar) en un depósito de agua, se observará que en el interior del tubo se forma una columna de agua: este fenómeno es conocido como **capilaridad.** Que el líquido suba por el interior de un capilar es debido a que lo puede humedecer; es decir, el fenómeno de capilaridad se presenta cuando las fuerzas de cohesión entre las moléculas del líquido son menores que las fuerzas de adhesión entre las paredes del tubo y éste.

También pueden suceder dos fenómenos opuestos entre sí: el primero, que la columna del líquido sobrepase el nivel del contenido en el depósito; el segundo, que la columna del líquido en el capilar sea menor que el nivel del líquido del depósito; esto último iría en contra del principio de los vasos comunicantes.

De la observación de estos fenómenos, Jurin formuló una ley que dice: “Para un mismo líquido, la altura de la columna que se forma en el interior del capilar es inversamente proporcionai al radio interno del mismo, a temperatura constante”. Esto es, a menor diámetro del tubo, mayor es el ascenso del líquido.

En la vida diaria se observan diversos fenómenos de capilaridad; cuando se moja un bolillo por la punta en la taza de café, se observa cómo el pan se moja por encima del nivel del líquido contenido en la taza; la lámpara de petróleo, para que prenda, requiere de este fenómeno, ya que es a través de la mecha que el petróleo asciende; en las plantas, el fenómeno de capilaridad es de gran importancia para absorber y llevar agua de la raíz hasta las hojas más altas. Existen sustancias que disminuyen la tensión superficial: se les llama **tensoactivas;** los jabones son un claro ejemplo de ellas.

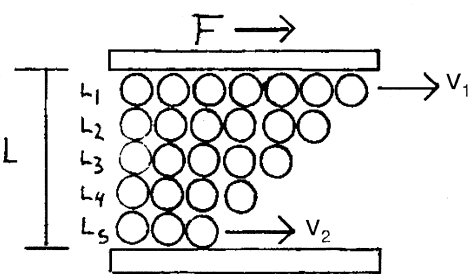
VISCOSIDAD

Corresponde a la sesión de GA 2.18 ¡QUÉ LENTO!

El término **viscosidad** normalmente es relacionado con los aceites, y con la lentitud con que éstos se desplazan por una superficie; sin embargo, también se sabe que no todos los aceites fluyen a la misma velocidad. Así, hay aceites automotores que son delgados o menos viscosos y aceites gruesos o más viscosos. En contra de lo que pudiera pensarse, la viscosidad no se presenta nada más en los aceites: es una propiedad de los fluidos en general; así, presentan viscosidad desde el agua hasta la miel de abeja, e incluso los gases.

Para generalizar el concepto de viscosidad, éste puede definirse “como la propiedad que determina la velocidad de desplazamiento de un fluido”; otra manera de decirlo es describiéndola como "la resistencia que opone un fluido para desplazarse sobre sí mismo". Esta dificultad de desplazamiento se debe a que las moléculas de los fluidos presentan fuerzas de fricción entre ellas y, mientras mayor sea esta fricción, mayor será la viscosidad del fluido.

Para determinar la viscosidad, imaginemos que un líquido se pone entre dos superficies y que se rebanan transversalmente en capas del grueso de una molécula, como se muestra en la figura.



La **fuerza F** mueve la plancha hacia la derecha, mientras la capa del **líquido 1** se mueve sobre la placa a una velocidad $\mathbf{v_1}$ y comunica su movimiento en menor grado a la siguiente capa, se continúa así hasta la capa 5, la cual se mueve con una velocidad $\mathbf{v_2}$; mientras mayor sea el número de capas, el movimiento de la última capa será menor. Consideramos que cada capa tiene un área A de $1 cm^2$.

La expresión matemática de la viscosidad es:

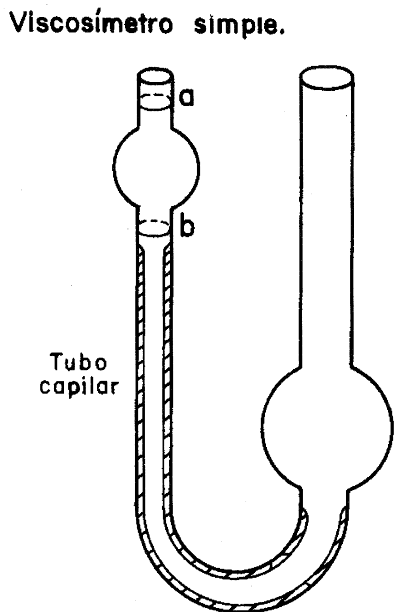
$$\frac{F}{A} = \left(\frac{v_1 - v_2}{L_t}\right)$$

En el **SI**, la unidad con que se mide la viscosidad no tiene nombre, aunque se suele expresar en $\dfrac{N \times s}{m^2}$

En el sistema cegesimal, la unidad de viscosidad se denomina *poise*. La unidad del **SI** equivale a 10 poises.

El coeficiente de viscosidad suele representarse por la letra griega eta (η). De acuerdo con la fórmula anterior, un líquido tiene una viscosidad de 1 poise si una fuerza de 1 dina mueve una unidad de área de 1 cm^2 (L_1) del líquido, con una velocidad de 1 cm/s con respecto a otra unidad de área de 1 cm^2 (L_2), separada a 1 cm de distancia (L_t).

En la actualidad, para medir la viscosidad de los líquidos se utiliza un instrumento llamado **viscosímetro de Ostwald.**



Viscosímetro de Ostwald.

Comúnmente, se determina la viscosidad específica de un líquido y no la viscosidad absoluta. El procedimiento para determinar la específica consiste en medir el tiempo que tardan dos líquidos para fluir a través de un capilar, de la marca **A** a la **B**. De uno de los líquidos se conoce su viscosidad, generalmente es el agua, y de los dos se conoce su densidad; partiendo de estos datos se emplea la fórmula:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{p_1 \, t_1}{P^2 \, t_2}$$

η_1 = Viscosidad conocida del líquido (generalmente agua)
d_1 = Densidad del líquido conocido
t_1 = Tiempo que tarda en fluir de **A** a **B** el líquido conocido
η_2 = Viscosidad del líquido problema
d_2 = Densidad del líquido problema
t_2 = Tiempo que tarda en fluir de **A** a **B** el líquido problema

Para comprender mejor este método y la aplicación de la fórmula, se realizará el siguiente ejercicio:

Al usar un viscosímetro de Ostwald para determinar la viscosidad del mercurio, se obtuvieron tiempos de fluido de agua y mercurio a 20 °C, de 120 s y de 13.65 s, respectivamente. La densidad del agua es de 1 g/cm³ y la del mercurio de 13.6 g/cm³; la viscosidad absoluta del agua es de 0.01005 poises.

Datos

$\eta_1 = 0.01005$ poises
$d_1 = 1$ g/cm³
$t_1 = 120$ s
$\eta_2 = ?$
$d_2 = 13.6$ g/cm³
$t_2 = 13.6$ s

Fórmula

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{p^1\, t_1}{p^2\, t_2}$$

Despeje

$$\eta_2 = \frac{\eta_1\, p^2\, t_2}{p^1\, t_1}$$

Sustitución

$$\eta_2 = \frac{(0.01005 \text{ poises})\ (13.6 \text{ g/cm}^3)\ (13.6 \text{ s})}{(1 \text{ g/cm}^3)\ (120 \text{ s})}$$

$$\eta_2 = \frac{\dfrac{\text{poises x g x s}}{1.85 \text{ cm}^3}}{120 \dfrac{\text{g x s}}{\text{cm}^3}}$$

Resultado

$\eta_2 = 0.0154$ poises.

Los líquidos presentan mayor fricción entre sus moléculas, es decir, mayor resistencia a fluir que los gases; esto significa que los líquidos tienen mayor viscosidad que cualquier gas.

Existen diversos factores que influyen en la viscosidad de los fluidos, uno de éstos es la temperatura; en los líquidos, la viscosidad generalmente disminuye al aumentar la temperatura; por ejemplo, el alcohol etílico presenta una viscosidad de 1.773 centipoises a 0 °C y ésta disminuye hasta 0.592 centipoises a una temperatura de 60 °C.

Tal vez se espere este mismo comportamiento en los gases, pero curiosamente ocurre lo contrario; en los gases la viscosidad aumenta al aumentar la temperatura. El número de choques entre las moléculas de un gas aumenta al subir la temperatura, y se hace más denso, puesto que, al aumentar el número de choques, las moléculas del gas están en mayor contacto.

Otro factor que aumenta la viscosidad entre líquidos de la misma clase es el peso molecular: a mayor peso molecular, mayor viscosidad; un ejemplo de esto son los aceites (hidrocarburos) para coche. Otro factor que influye en la viscosidad de los líquidos es el hecho de agregarles sustancias coloidales.

Un fluido importante del organismo es la sangre; mientras más viscosa sea ésta, requerirá de mayor esfuerzo por parte del corazón para poder bombearla a todo el cuerpo, lo que ocasiona un aumento en la presión de este fluido.

FENÓMENO EN LOS FLUIDOS

Corresponde a la sesión de GA 2.19 ¿CÓMO SE MUEVEN?

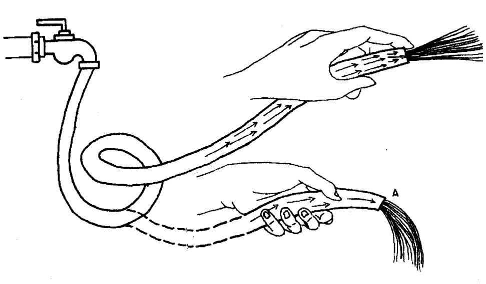
La hidrodinámica es una parte de la física que se encarga de estudiar el comportamiento de los fluidos en movimiento.

Un ejemplo de líquido en movimiento sería el agua que sale de una manguera, cuando se riega un jardín; a la cantidad de líquido que sale en un segundo se le conoce como gasto, y matemáticamente se expresa como:

$$q = (A) \times (v)$$

donde:

q = gasto
A = área de la sección transversal
v = velocidad a la que sale el líquido



La velocidad del líquido varía según la magnitud de la sección transversal del ducto.

TS/AA/CB/3/V.1/P-293-372.PM7.0 343 3/12/03, 4:14 PM

Por ejemplo:

¿Cuál será el gasto de una manguera con una sección transversal de 5.3 x 10^{-4} m^2, si el líquido sale a una velocidad de 3.2 m/s?

Datos	**Fórmula**	**Sustitución**
q = A = 5.3 x 10^{-4} m^2 V = 3.2 m/s	q = A x v	$q = (5.3 \times 10^{-4}\ m^2)\ (3.2\ \frac{m}{s})$

Operaciones

$$(5.3 \times 10^{-4}\ m^2) \quad (3.2\ \frac{m}{s})$$

$$= 1.\ 696 \times 10^{-3}\ \frac{m^3}{s}$$

$$m^2\ x = \frac{m}{s} = \frac{m^3}{s}$$

Convertir los m^3/s a ℓ/s (litros/segundo) se puede hacer mediante una regla de tres, recordando que 1 m^3 = 1 000 ℓ.

1 m^3 ———————— 1000 ℓ

1.696 x 10^{-3} m^3/s ———— x

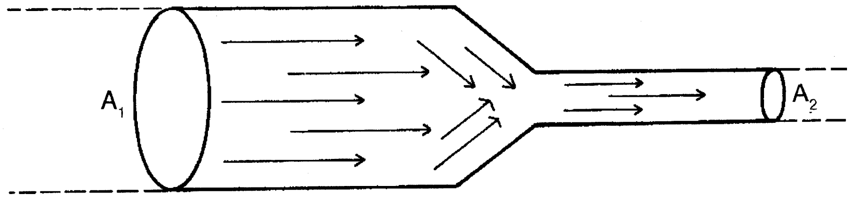
$$x = \frac{(1.696 \times 10^{-3}\ m^3/s)\ (1\ 000\ \ell)}{1\ m^3}$$

$$x = \frac{1.696\ \ell}{1}$$

$$x = 1.696\ \frac{\ell}{s}$$

Por tanto, esa manguera desaloja 1.696 litros de agua cada segundo.

Sin embargo, ¿qué pasaría si la manguera cambiara su forma en cierto tramo, de manera que su diámetro disminuyese? Veamos una manguera que tiene una sección transversal (A) de 3.8×10^{-1} m^2 que se reduce a ( ) 1.5×10^{-1} m^2, como se muestra en la siguiente figura.



Ducto que reduce su sección transversal de (A_1) hasta (A_2).

En esa manguera, el volumen de agua que pasa por $\mathbf{A_1}$ debe ser igual al volumen de agua que pasa por $\mathbf{A_2}$. Como los líquidos son "incompresibles", el volumen de pase por $\mathbf{A_1}$ tendrá que circular por $\mathbf{A_2}$, en el mismo tiempo; para que esto se pueda lograr, en $\mathbf{A_2}$ el líquido fluirá con mayor velocidad que en $\mathbf{A_1}$.

Lo anterior se expresa matemáticamente a través de la siguiente ecuación de continuidad:

$$A_1v_1 = A_2v_2$$

Donde A_1 = área transversal de la sección 1

Donde A_2 = área transversal de la sección 2

v_1 = velocidad del líquido al pasar por A_1

v_2 = velocidad del líquido al pasar por A_2

Ejemplo:

De una caldera sale un tubo con una área transversal de 2.6×10^{-1} m^2, por el cual circula agua con una velocidad de 0.3 m/s; el tubo se estrecha hasta llegar a un área transversal de 1.9×10^{-1} m^2. ¿A qué velocidad circula el agua en este punto?

Datos	**Fórmula**	**Despeje**
$A_1 = 2.6 \times 10^{-1}\ m^2$	$A_1\,v_1 = A_2\,v_2$	$v_2 = \dfrac{A_1\,V_1}{A_2}$
$v_1 = 0.3$ m/s		
$A_2 = 1.9 \times 10^{-1}\ m^2$		
$v_2 = ?$		

Sustitución

$$v_2 = \frac{(2.6 \times 10^{-1}\ m^2)\ (0.3\ m/s)}{1.9 \times 10^{-1}\ m^2}$$

Operaciones

$$\frac{(2.6 \times 10^{-1}\ m^2)\ (0.3\ m/s)}{1.9 \times 10^{-1}\ m^2} = \frac{7.8 \times 10^{-2}\ m^3/s}{1.9 \times 10^{-1}\ m^2}$$

Resultado

$v_2 = 0.41$ m/s

Otro ejemplo sería:

Un tubo de drenaje, que tiene un área transversal de 5×10^{-3} m^2, se reduce a 3.8×10^{-3} m^2; el agua circula a una velocidad de 0.71 m/s en el área transversal más reducida.

a) ¿Cuál es la velocidad del agua donde el área transversal es mayor?
b) ¿Cuál es el gasto?
c) ¿En cuánto tiempo se desalojarán 700 ℓ de agua?

Para resolver el inciso (a), se utiliza la ecuación de continuidad.

Datos

$A_1 = 5 \times 10^{-3}$ m^2
$v_1 =$
$A_2 = 3.8 \times 10^{-3}$ m^2
$v_2 = 0.71$ m/s

Fórmula

$A_1 v_1 = A_2 v_2$

Despeje

$$v_1 = \frac{A_2 v_2}{A_1}$$

Sustitución

$$v_1 = \frac{(3.8\ \ 10^{-3}\ m^2)\ (0.71\ m/s)}{5 \times 10^{-3}\ m^2}$$

Operaciones

2.705×10^{-3} m/s
5×10^{-3} m^2

Resultado

$$v_1 = 0.5396 — = 0.54\ \frac{m}{s}$$

Para resolver el inciso (b), se utiliza la ecuación de gasto.

Como el gasto es igual en cualquier lugar del tubo, se puede utilizar A_1 v_1 o A_2 v_2.

Utilizando A_1 v_2

Datos	**Fórmula**	**Sustitución**
$A_1 = 5 \times 10^{-3}$ m^2		
$V_1 = 0.54$ m/s		
q = ?	$q = A_1 v_1$	$q = (5 \times 10^{-3}$ m$^2)$ (0.54 m/s)

Operaciones	**Resultado**
$(5 \times 10^{-3} \times 0.54)$ (m^2 x m/s)	$q = 2.27 \times 10^{-3}$ m^3/s

Conversión de m^3 a ℓ

1 m^3 ———————— 1 000 ℓ
2.7×10^{-3} m^2 ————— X
X = 2.7 ℓ/s

Por tanto, el gasto es de 2.7 ℓ/s.

Resolver el inciso (b), utilizando A_2 v_2

Datos	**Fórmula**	**Sustitución**
q = ?		
$A_2 = 3.8 \times 10^{-3}$ m^2	$q = A_2 v_2$	$q = (3.8 \times 10^{-3}$ m$^2)$ (0 71 m/s)
$v_2 = 0.71$ m/s		

Operaciones	**Resultado**
(3.8 x 10 m^2) (0.71 m/s)	$q = 2.69 \times 10^{-3}$ m^3/s

Conversión m^3 a ℓ

1 m^3 ————————— 1 000 ℓ
2.69×10^{-3} m^3 ————— x
x = 2.7 ℓ

Por tanto, el gasto es de 2.7 l/s.

Para resolver el inciso (c), se utiliza el valor del gasto, el cual dice que por cada segundo se desalojan 2.7 litros; entonces:

1 s ———————— 2.7 l

x ————————— 700 l

$$x = \frac{(700\ \text{l})\ (15)}{2.7}$$

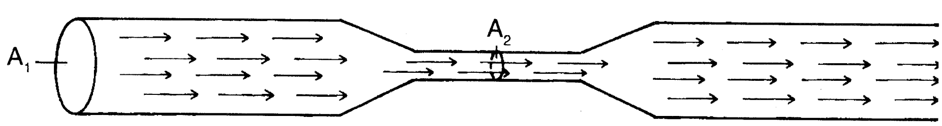
$x = 859.25$ s

$x = 4.32$ h

Es decir, se necesitan 4.32 horas para desalojar 700 litros.

Ahora se estudiará la presión que ejerce un fluido en el interior de la manguera, cuando éste aumenta o disminuye su velocidad.

En una manguera, como la que se muestra en la figura siguiente, circula agua.



Ducto con secciones transversales diferentes.

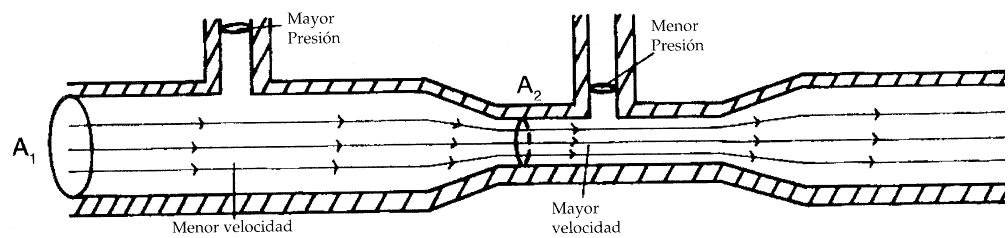
Ya sabemos que el volumen de agua que pasa por $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$ es el mismo, y que éste pasa en el mismo tiempo, pero desconocemos cuál será la presión $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$

Esta cuestión se la planteó el físico suizo Daniel Bernoulli en 1738 y, a partir de sus trabajos sobre fluidos, determinó que: "A través de un ducto, la suma de las energías (mecánica, potencial, cinética y de flujo) de un fluido permanece constante"; este enunciado se conoce como **Principio de Bernoulli,** el cual apoya a su vez la ley de la conservación de la energía.

De acuerdo con este principio, si en un ducto la velocidad del fluido se incrementa, la fuerza o energía de presión disminuye en el tramo donde el flujo aumenta su velocidad.

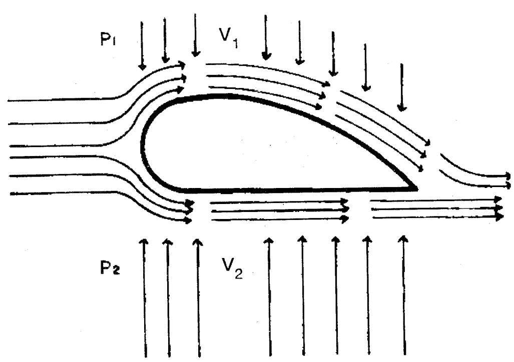
TS/AA/CB/3/V.1/P-293-372.PM7.0 348 3/12/03, 4:45 PM

Esta diferencia de presión se puede demostrar fácilmente mediante el dispositivo llamado Tubo de Venturi (ver figura). Este tubo cuenta con dos salientes paralelas entre sí y perpendiculares al tubo, una sale de la sección transversal más amplia del ducto y la otra de la sección transversal más angosta del mismo; estas salientes permiten medir la presión en el interior del ducto donde se encuentran insertadas.

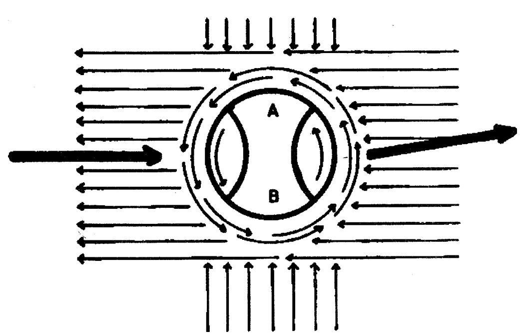


Cuando el fluido circula por A_2 aumenta su velocidad y, en consecuencia, disminuye la presión porque parte de esta fuerza de presión se transforma en energía cinética.

Ello explica por qué un avión puede elevarse, ya que las capas de aire que circulan por arriba de las alas lo hacen con mayor velocidad que las capas que circulan por debajo de éstas, formando así mayor presión de abajo hacia arriba.



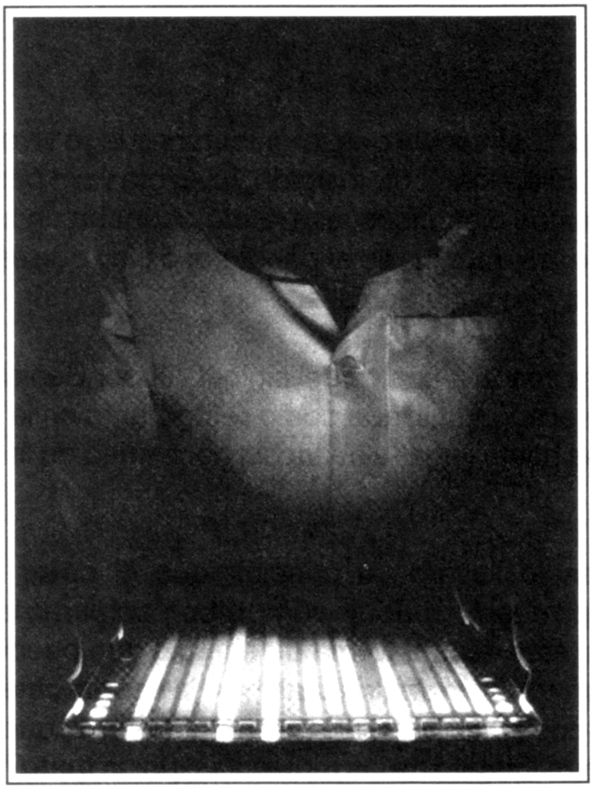
Ala de un avión bajo la acción del aire.



Una pelota, que es lanzada y gira sobre sí misma, arrastra aire en su giro. En el punto **A** (menor presión) la velocidad del aire es mayor, que en el punto **B** (menor presión), por lo que la pelota puede describir una curva.

Capítulo 3

TEMPERATURA



Se puede decir que la temperatura es el promedio de la energía cinética que tienen las moléculas de un cuerpo. Esta se puede medir con un termómetro y existen diferentes escalas para hacerlo. Una de las metas de los científicos es alcanzar temperaturas por abajo del cero absoluto, es decir, menores de –273 °C El aumento o disminución en la temperatura de las sustancias provoca los cambios de estado físico.

TS/AA/CB/3/V.1/P-293-372.PM7.0 351 3/12/03, 4:48 PM

CALOR Y TEMPERATURA

Corresponde a la sesión de GA 3.22 SUMA Y PROMEDIO

Los términos calor y temperatura están muy ligados, por lo que, en general, son utilizados indistintamente. En física es importante establecer la diferencia que existe entre ellos.

Calor

Antiguamente, los físicos creían que, al calentar a fuego vivo un cuerpo, a éste se le transmitía un fluido incoloro, insípido, invisible y sin peso al que llamaron “calórico”; según estos científicos, ese fluido ocupaba un lugar en el espacio que provocaba que la sustancia se expandiera; o bien que ésta, al enfriarse, se contrajera debido a que el fluido salía.

Esta teoría fue desechada a finales del siglo XVIII por Benjamín Thompson, al percatarse de que el agua utilizada como refrigerante en la perforación de un cañón se calentaba hasta llegar a hervir sin necesidad de la aplicación directa del fuego.

Sus observaciones lo llevaron a concluir que el **calor** era producto del movimiento. Tiempo después, Joule comprobó y confirmó la teoría de Thompson sobre el calor; éste es una forma de energía que puede transformase en otras y producir un trabajo; Joule establece la **teoría cinética** que dice: “el calor de cualquier cuerpo depende de la energía interna que posea”, la cual se manifiesta con el movimiento de las moléculas, por lo tanto “el calor es la suma de la energía cinética de todas las moléculas que lo forman”.

También logra medir la cantidad de calor, cuya unidad en el **SI** es el joule (J). Existe una unidad muy utilizada, la caloría (cal). La equivalencia entre ellas es: 4.184 J = 1 cal.

La caloría es la cantidad de energía calorífica necesaria para que un gramo de agua eleve su temperatura un grado celsius (de 14.5 °C a 15.5 °C).

Temperatura

Después de que un cuerpo ha estado expuesto al sol por un tiempo, al tocarlo, se dice que está caliente. Este tipo de apreciaciones se pueden realizar gracias al sentido del tacto con el que cuenta el ser humano. Cualquier individuo es capaz de determinar si un cuerpo está caliente, frío o templado, utilizando el sentido del tacto; sin embargo, ello no es totalmente confiable, porque en ocasiones cuerpos fríos parecen calientes después de tocar un cuerpo más frío. No obstante, todo cuerpo que está frío o caliente, posee energía interna, es decir, cuenta con una temperatura, ésta dependerá de la energía cinética que posee en sus moléculas.

Entonces, se puede decir que la temperatura de un cuerpo es el promedio de la energía cinética de todas las moléculas que lo forman.

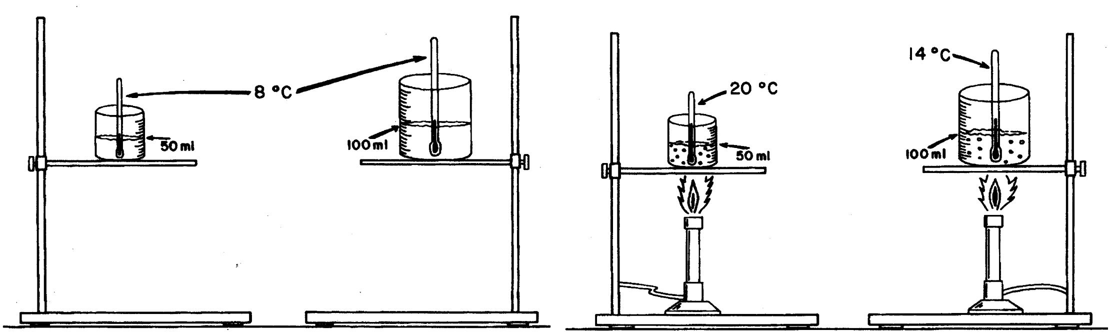
La temperatura es considerada una magnitud fundamental, por lo que su unidad en el **SI** es el kelvin (K), también se utilizan otras escalas como: la Celsius y la Fahrenheit.

Aunque el calor y la temperatura de un cuerpo están estrechamente ligados, existen grandes diferencias entre ambos términos; algunas de ellas son las siguientes:

El calor no se puede almacenar porque está en constante movimiento, es decir, pasa de un cuerpo a otro continuamente.

Un cuerpo gana o pierde energía en forma de calor, de lo cual depende que su temperatura se eleve o disminuya, y está en relación directa con la cantidad de masa del cuerpo. Debido a ello, para elevar la temperatura de un cuerpo con una masa grande se necesita mayor cantidad de calor que la que se requiere para elevar la temperatura de otro de masa más pequeña.

Al aplicar la misma cantidad de calor a dos cuerpos de diferente masa, el de menor masa elevará más su temperatura por el menor número de moléculas que tiene; la temperatura de un cuerpo es, por lo tanto, el promedio de la energía cinética de las moléculas que contiene.



El recipiente que contiene menor cantidad de agua aumentó más su temperatura.

El calor y la temperatura están presentes siempre y se les puede apreciar en muchos fenómenos. Un ejemplo claro de ello es nuestro cuerpo, el cual tiene una temperatura aproximada de 37.5 °C debido al calor que genera la energía vital; las rocas, al absorber el calor de los rayos del sol, aumentan su temperatura; el agua de la superficie de un lago o del mar absorbe calor durante el día; aunque tanto en el agua como en la roca sucede lo mismo, en el lago hay una pérdida de calor y temperatura a causa de la evaporación, con su correspondiente pérdida de masa. Durante la noche, el calor absorbido por las rocas es liberado hacia el medio ambiente, lo cual produce que la temperatura de éstas baje.

EQUILIBRIO TÉRMICO

Corresponde a la sesión de GA 3.23 SIEMPRE IGUAL

Todo cuerpo tiene una temperatura determinada, la cual depende del tipo de materia de que está formado y de la cantidad de masa que tenga, así como de su relación con otros cuerpos; de tal forma, un objeto de madera y uno de vidrio pueden tener diferente temperatura aun bajo las mismas condiciones ambientales.

Por ejemplo, después de tocar un cuerpo metálico y uno de papel, se puede determinar cuál tiene la mayor o la menor temperatura.

Sin embargo, ¿qué sucederá al poner en contacto dos cuerpos con diferentes temperaturas? ¿Cada cuerpo conservará su propia temperatura?

Bien, recuérdese ante todo que el **calor** es una forma de energía que no puede ser almacenada, sino que se transmite de un cuerpo a otro. Al poner en contacto un cuerpo de mayor temperatura con otro de menor, el más caliente cederá calor al más frío, que lo recibe o absorbe; es decir, el de mayor temperatura siempre cederá su calor al de menor temperatura.

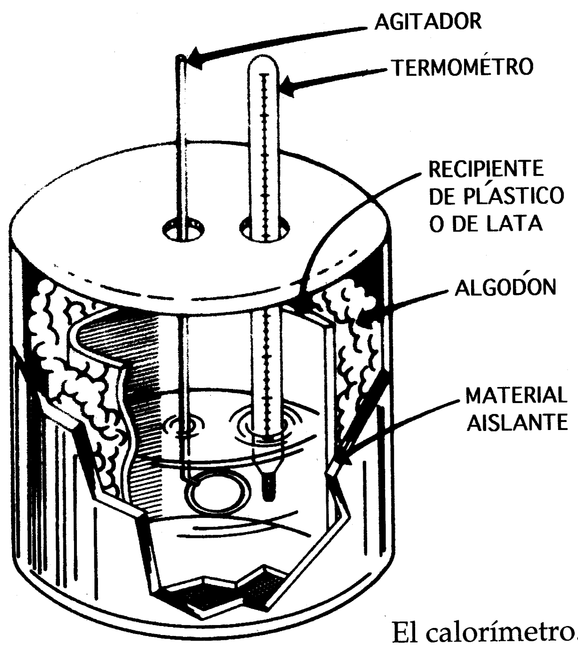
Ejemplo:

Un trozo de hierro caliente al rojo vivo se introduce en aceite frío y, después de un tiempo, el aceite y el hierro llegan a tener la misma temperatura; es decir, el hierro cedió cierta cantidad de calor que el aceite absorbió para alcanzar un **equilibrio térmico.**

Por tanto, se puede afirmar que cuerpos con diferentes temperaturas llegan al equilibrio térmico "cuando el calor cedido o dado es igual al calor absorbido o recibido".

Lo anterior se comprueba al tomar la temperatura de ambos cuerpos mientras están en contacto, la cual debe ser igual; sin embargo, es necesario aclarar que este intercambio de calor se realiza en un sistema abierto (lo que significa que no se trabaja en condiciones controladas de laboratorio), por lo que parte del calor del trozo de metal se dispersa en el aire; incluso, si el metal está muy caliente, es posible que el aceite se llegue a quemar, perdiéndose calor en el **proceso.**

El **calorímetro** es un aparato o dispositivo que sirve para comprobar el equilibrio térmico; el más común es el calorímetro de agua que está formado por un recipiente metálico, el cual contiene otro en su interior, aislado y bien pulido, para evitar la pérdida de calor por radiación; también tiene una tapa que cierra herméticamente, la cual presenta dos orificios, uno para introducir el termómetro y el otro para el agitador.



El calorímetro.

El calorímetro funciona de la siguiente manera: se vierte la cantidad necesaria de agua y con el termómetro se toma su temperatura; luego el cuerpo caliente, cuya temperatura se quiere medir, se introduce en él; se cierra por medio de la tapa y con el agitador se mueve la mezcla. Al mismo tiempo se observa en el termómetro cómo se va elevando la temperatura, hasta estabilizarse en un punto; en ese momento se alcanzó el **equilibrio térmico.**

Este fenómeno sucederá siempre que se pongan en contacto dos o más cuerpos con diferentes temperaturas.

En los utensilios térmicos empleados en el hogar se comprueba el fenómeno de equilibrio térmico, además de otros principios, como la radiación del calor.

DILATACIÓN DE LA MATERIA

Corresponde a la sesión de GA 3.24 ¿PARA DÓNDE CRECE?

Un cambio en la temperatura, generalmente, provoca en los materiales un cambio de tamaño y esto es lo que caracteriza a la dilatación.

El fenómeno de dilatación se presenta tanto en los sólidos como en los líquidos o gases. Por el momento sólo se tratarán los cambios de tamaño que no involucran, en la materia, un cambio de estado.

Si se describe a la temperatura en términos de movimiento molecular, se tiene que: a un aumento de temperatura, las moléculas de los cuerpos se mueven con mayor rapidez y por lo tanto ocupan un mayor espacio, es decir, el cuerpo se dilata.

Un cuerpo sólido sólo sufre dilatación volumétrica, pero por su construcción se considera que puede presentar tres tipos de dilatación: **lineal**, **superficial** y **volumétrica** o **cúbica.**

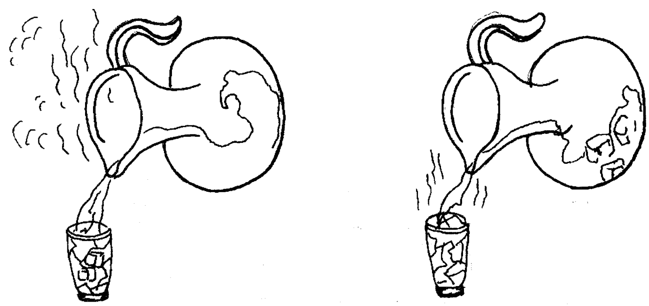
La dilatación **lineal** se presenta en los sólidos que, al calentarse, sufren cambios en su longitud que son muy notorios. Por ejemplo, cuando se calienta una varilla de hierro, ésta se dilata en mayor proporción a lo largo.

La dilatación **superficial** es el aumento que experimenta un cuerpo en su superficie al calentarse. Este tipo de dilatación se presenta cuando el cuerpo ocupa una superficie delgada, por ejemplo, cuando se calienta una placa de cobre.

La dilatación **volumétrica** o **cúbica** es el aumento del volumen de un cuerpo cuando éste se calienta. Todos los sólidos sufren este tipo de dilatación, pero es más notoria si la geometría de éstos es regular. Por ejemplo: una esfera de plomo.

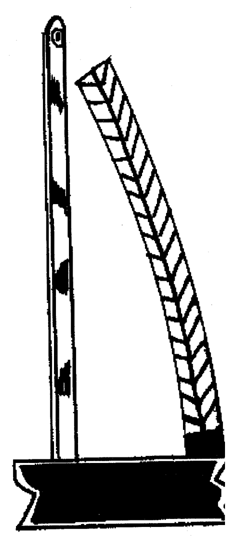
Algunos cuerpos llegan a romperse después de experimentar una dilatación térmica. Un ejemplo clásico es el de un vaso de vidrio que, si se calienta y se enfría bruscamente, se rompe; o uno frío que se calienta con rapidez, sufre también el rompimiento. Los cambios de temperatura tienen lugar a diferentes velocidades en las capas interna y externa del vaso; de aquí se concluye que si un vaso se dilata o contrae bruscamente, se rompe con facilidad.

Existe un tipo de vidrio conocido como Pyrex, el cual es de un material más resistente a los cambios bruscos de temperatura que el vidrio común; los instrumentos fabricados con este material se utilizan, por lo general, en los laboratorios.



El termostato es un dispositivo que se abre o cierra para mantener constante la temperatura en el interior de un aparato y funciona bajo el principio de dilatación. Este dispositivo está formado de una barra metálica compuesta, a su vez, por dos metales, los cuales se contraen o dilatan con distinta intensidad al sufrir un cambio de temperatura. El sistema está montado de tal forma que la barra se dobla hacia un lado al enfriarse, cerrando así el circuito y conectando el sistema de calentamiento; y se mueve hacia el lado contrario cuando se ha calentado lo suficiente, desconectando el sistema.

Otro ejemplo de la aplicación de la dilatación es el de los remaches que se insertan calientes, los cuales unen firmemente a las piezas remachadas cuando éstas se enfrían.



Termostato

• Coeficiente de dilatación térmica lineal.

Cuando los cuerpos se someten a un aumento de temperatura, se dilatan. En los sólidos generalmente se considera su dilatación lineal, la cual se puede calcular de la siguiente manera:

Si **L** es la longitud del sólido, al haber un cambio en la temperatura **T** (lo cual significa un incremento, $\Delta T = (T_2 - T_1)$), su longitud también experimenta un cambio considerado como ΔL ($L = L_2 - L_1$). Generalmente la cifra **T** es pequeña y, por tanto, L es proporcional al cambio de temperatura, a la longitud original y a un coeficiente conocido como coeficiente de dilatación lineal (α).

Expresando esto de forma matemática se tiene que:

$$\boxed{\Delta L = \alpha \, \Delta L \, T}$$

que es el coeficiente de dilatación con el valor propio de cada material y al despejarlo de la ecuación anterior queda como:

$$\boxed{\alpha = \frac{\Delta L}{L \, \Delta T}}$$

De aquí que (α) se pueda interpretar como la variación de la longitud por cada grado que varíe la temperatura. Cabe hacer algunas consideraciones con respecto a la longitud final, ya que si la temperatura inicial es de 0 °C, la longitud final se debe calcular como:

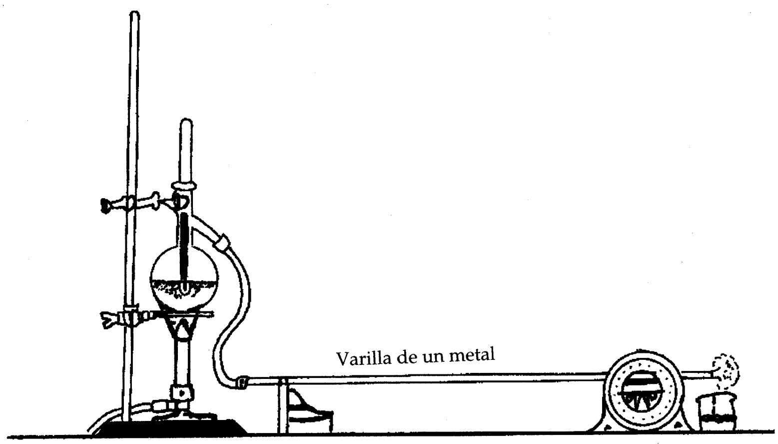
$$\boxed{L_2 = L_1 \, (1 + \alpha \, T_2)}$$

Pero si la temperatura inicial es diferente de 0 °C, entonces:

$$\boxed{L_2 = L_1 \, [\, 1 + \alpha \, (T_2 - T_1) \,]}$$

Por lo que respecta a las temperaturas, éstas pueden ser negativas o positivas; en caso de ser negativas, se debe tener cuidado con el manejo de los signos en las operaciones.

Experimentalmente, el coeficiente de dilatación lineal de los sólidos se determina con el aparato de Cowan:



Aparato de Cowan

Coeficientes[1] de dilatación para algunos sólidos en $\frac{1}{°C}$

Cobre	0.000 018	$= 18 \times 10^{-6}$
Plata	0.000 020	$= 20 \times 10^{-6}$
Aluminio	0.000 024	$= 24 \times 10^{-6}$
Hierro	0.000 012	$= 12 \times 10^{-6}$
Vidrio	0.000 008	$= 8 \times 10^{-6}$
Ladrillo	0.000 010	$= 10 \times 10^{-6}$

Ejercicio:

Un puente de hierro a 0 °C tiene una longitud de 500 m. ¿Cómo variará su longitud si se le calienta aumentando su temperatura hasta 40 °C?

Datos

$T_1 = 0°C$
$T_2 = 40\ °C$
$L_1 = 500\ m$
$L_2 = ?$
$\alpha = 12 \times 10^{-6} \frac{1}{°C}$

Fórmula

$L_2 = L_1 (1 + \alpha T_2)$

[1] *Nueva Enciclopedia Autodidáctica Quillet*, Tomo II, México, Cumbre, 1984, pp. 355-357.

Sustitución

$$L_2 = 500 \text{ m } [1 + (12 \times 10^{-6} \frac{1}{°C} \times 40 \text{ °C})]$$

Operaciones

L_2 = 500 m [1 + (0.00048)]

L_2 = 500 m x 1.00048

Resultado

L_2 = 500.24 m

El puente se dilató 0.24 m

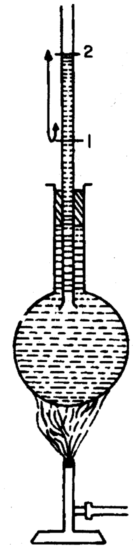
En algunos ejercicios, el resultado puede ser negativo con lo cual se indica que el objeto se acorta.

DILATACIÓN DE LOS FLUIDOS

Corresponde a la sesión de GA 3.25 SIEMPRE AUMENTA

La dilatación es, como ya se ha mencionado, un aumento de tamaño en la materia cuando a ésta se le aplica calor.

La dilatación de un líquido es casi 10 veces mayor que la de un sólido, debido a que en los primeros la fuerza de cohesión entre sus moléculas es relativamente débil. Los líquidos no poseen una forma definida y toman la del recipiente que los contiene, por lo que presentan dos tipos de dilatación: **aparente y absoluta**.



Montando un equipo como se ilustra en el siguiente esquema:

Se observa que, al calentarse, el líquido del tubo desciende (señal 1) y esto se debe a que sólo se ha dilatado el recipiente. Después, el líquido comienza a subir (señal 2), es decir, el líquido se ha dilatado, pero como al mismo tiempo el material del recipiente también se dilata y por ello su capacidad aumenta, el volumen del tubo comprendido entre el paso 1 y el 2 es la diferencia entre la dilatación lineal del líquido y la dilatación cúbica del recipiente. A esta diferencia se le denomina **dilatación aparente del líquido**; y se le llama dilatación absoluta, al aumento real del volumen del líquido, en otras palabras, es igual a la dilatación aparente más la dilatación del recipiente.

Si se conoce la dilatación del recipiente, es fácil determinar la dilatación absoluta del líquido que contiene. Representando matemáticamente al coeficiente de dilatación absoluta como β (beta), tenemos que:

$$\boxed{\beta = \frac{\Delta V}{V_1 \Delta T}}$$

De aquí se observa que β es relativamente independiente de la temperatura. Si la temperatura inicial es 0 °C, el volumen final se calcula utilizando:

$$\boxed{V_2 = V_1(1 + \beta t)}$$

pero si es diferente de 0 °C,

$$\boxed{V_2 = V_1 \,[1 + \beta\,(T_2 - T_1)]}$$

La dilatación de los líquidos se aplica en la fabricación de termómetros.

Ejemplo:

El volumen final de petróleo fue de 5 dm^3 y se sabe que la temperatura inicial y final fueron, respectivamente, 0 °C. y 35 °C. Calcule el volumen inicial del petróleo.

$$(\beta \text{ petróleo} = 0.00104 \ \frac{1}{°C})$$

Datos

β petróleo $= 0.00104 \frac{1}{°C}$

$T_1 = 0$ °C

$T_2 = 35$ °C

$V_1 = ?$

$V_2 = 5\ dm^3$

Fórmula

$V_2 = V_1(1 + \beta\ T_2)$

Despeje

$$V_1 = \frac{V_2}{(1 + \beta\, T_2)}$$

Sustitución

$$V_1 = \frac{5\ dm^3}{1 + (0.00104\ \frac{1}{°C} \times 35\ °C)}$$

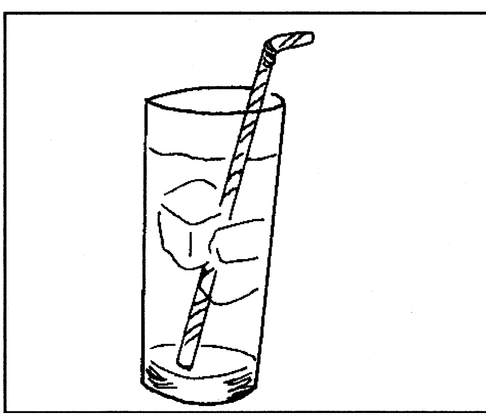
Resultado

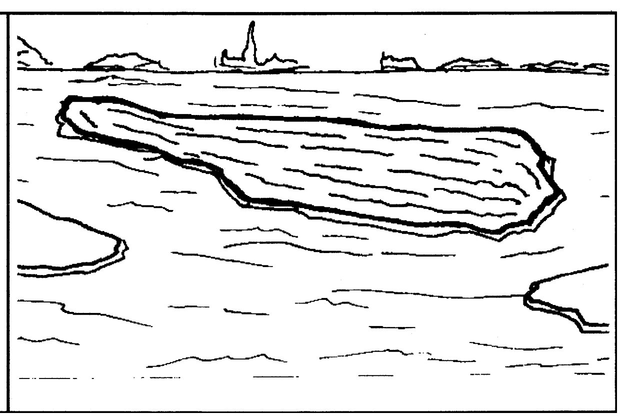
$V_1 = 4.82\ dm^3$

La dilatación del agua

Casi todas las sustancias, al enfriarse, se contraen. Un ejemplo claro es el enfriamiento y endurecimiento de la cera. Sin embargo, el agua no se comporta de esta manera, ya que cuando alcanza los 4 °C, en vez de dilatarse se contrae; a partir de 4 °C tanto el aumento como la disminución de la temperatura la hacen dilatarse, por lo que el agua alcanza su mayor densidad y menor volumen a esta temperatura.

Este comportamiento parece contradecir el hecho de que, al enfriarse una sustancia, se frena el movimiento de sus moléculas y esa es la razón por la que ocupa menos espacio; pero experimentalmente se ha comprobado que en el hielo existen espacios intermoleculares vacíos, lo cual facilita que el mismo flote.





Esta propiedad del agua explica por qué es posible que exista vida acuática por debajo de los témpanos: la temperatura del agua es aproximadamente de 4 °C bajo el hielo y ésta presenta su máxima densidad, pero no se congela y permite la vida. La densidad del agua a 4 °C es de 0.999 8 y la del hielo a 0 °C es de 0.917, por lo cual ¡los témpanos flotan!

MEDICIÓN DE LA TEMPERATURA

Corresponde a la sesión de GA 3.26 FRÍO O CALIENTE

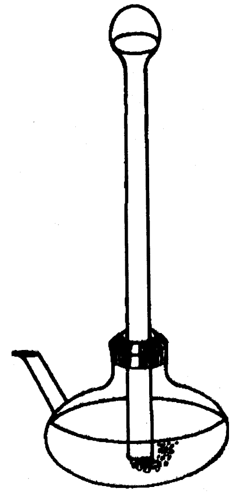
Los termómetros son aparatos que están graduados porque sirven para medir la temperatura de los cuerpos; aunque, en sentido estricto, más que un aparato para hacer mediciones es un instrumento para comparar temperaturas. Hay varios tipos de termómetros, algunos contienen sólidos, otros líquidos y otros más gases, según su utilización específica; asimismo, su construcción se basa en los fenómenos de dilatación, contracción y equilibrio térmico. Los más comunes son de:

mercurio, alcohol, gases y metales.

En la antigüedad, se utilizaba el sentido del tacto para saber si un cuerpo se encontraba frío o caliente, pero de esta manera se obtenía una medida inexacta y muy relativa de la temperatura, ya que para algunas personas las cosas parecían calientes y para otras frías; además, en otros casos la temperatura no podía medirse mediante estos recursos, debido a las limitaciones propias del cuerpo humano, incapaz de soportar temperaturas extremas.

Algunos talleres de herrería, para determinar la temperatura se basan en el color de las radiaciones que emiten los metales; ésta es una escala poco precisa pero bastante práctica para sus fines.

Galileo Galilei (1564-1642) fue el primero en construir un termómetro el cual, por cierto, no era preciso, ya que al medir sufría la influencia tanto de los cambios de presión como los de temperatura.



Los termómetros hechos con mercurio (también conocidos como termómetros de máxima), se utilizan para medir temperaturas desde – 30 °C hasta 350 °C, ya que fuera de estos límites el mercurio alcanza sus puntos de solidificación y evaporación, respectivamente, haciendo la lectura poco confiable. El mercurio es un elemento ideal para la construcción de termómetros por las siguientes razones:

1. Es un metal y, por tanto, buen conductor del calor.

2. Se encuentra en estado líquido.

3. No moja el vidrio.

4. Su dilatación es constante, cosa que no sucede con el agua (ver caso especial del agua en el artículo anterior).

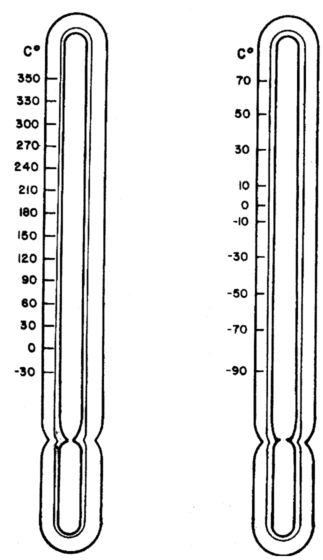
5. Posee un calor específico relativamente bajo, lo cual lo hace un material sensible a los cambios de temperatura.

6. Se extrae de la naturaleza con un alto grado de pureza.

7. Es de color gris, fácilmente visible a través del vidrio.

En algunas ferias venden termómetros para bromas, hechos con líquido de diferentes colores, este líquido es por lo general alcohol. Los termómetros de alcohol se utilizan para medir la temperatura de las habitaciones y bajas temperaturas, las cuales no se pueden determinar con un termómetro de mercurio, por lo que este tipo de termómetros también se conoce como termómetro de mínima.

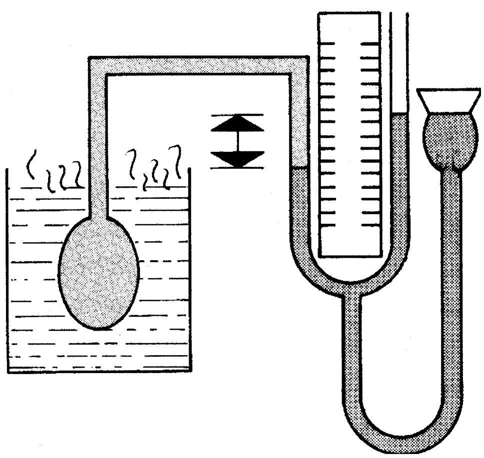
La construcción de termómetros, tanto de mercurio como de alcohol, consiste en un tubo capilar de vidrio en el cual se hace vacío; en uno de sus extremos existe una ampolleta con mercurio o alcohol, mientras que el otro está cerrado. Este aparato es capaz de percibir la temperatura del medio con el que se ponga en contacto gracias a que la sustancia que contiene adquiere un volumen determinado: cuando aumenta la temperatura, el líquido se dilata, alargándose dentro del tubo capilar; y cuando la temperatura disminuye, el líquido se contrae.



Para graduar el termómetro de mercurio en escala centesimal se le sumerge en un recipiente con hielo, de manera que el nivel indicado corresponderá a 0 °C, para determinar el punto más alto se rodea al termómetro de vapores de agua hirviendo, y cuando se llega al equilibrio, este punto representará el nivel que se marca como 100 °C; después se procede a hacer divisiones en 100 partes iguales y, tomándolas como base, se puede prolongar la escala del termómetro con cantidades inferiores a 0, o superiores a 100.

El termómetro de alcohol no puede graduarse como el de mercurio, porque el alcohol tiene un punto de ebullición de 78 °C y a –100 °C se vuelve pastoso; por ello, para determinar el cero y el resto de la escala, debe compararse con un termómetro de mercurio previamente graduado.

Los termómetros de gas son sumamente exactos, ya que los gases que se someten a un pequeño cambio de temperatura producen un gran cambio en su volumen; sirven para medir tanto altas como bajas temperaturas, aunque tienen la desventaja de que son afectados por las modificaciones de la temperatura ambiental, ya que son altamente sensibles. Con estos termómetros se pueden medir temperaturas de aproximadamente –200 °C hasta 1800 °C. En general, están hechos con gases como: hidrógeno, helio o nitrógeno. Por su costo y difícil manejo, este tipo de termómetros son de uso casi exclusivo de la industria.



Los termómetros de metales (hierro, platino o iridio) pueden determinar temperaturas de hasta 2 000 °C y se utilizan, por lo general, para medir altas temperaturas; constan de un tubo de metal que es atravesado por una corriente de agua; para evitar que el metal se evapore, se introduce el tubo en la sustancia a la cual se quiere determinar su temperatura; finalmente, ésta se calcula con la velocidad del gasto de agua por unidad de tiempo.

Los instrumentos de medición para altas temperaturas tales como termómetros de gases o de metales reciben también el nombre de pirómetros.

TERMÓMETRO

Corresponde a la sesión de GA 3.27 ¿CÓMO, TIENES TEMPERATURA?

En la lección anterior vimos que existen varios tipos de termómetros; su utilización depende del objeto que deseamos medir y la temperatura a la que se encuentra aproximadamente éste. Por su uso, éstos se dividen en:

- Laboratorio
- Clínico
- Climático
- Industrial

- **Termómetro de laboratorio**

Está hecho de mercurio y su graduación va de 38 °C hasta 100 °C.

- **Termómetro clínico**

También está hecho de mercurio y sirve para medir la temperatura de las personas; su escala va de 34 °C hasta 42 °C y cada grado está dividido en décimos para facilitar su lectura. En este tipo de termómetro, el tubo capilar es lo suficientemente angosto como para que el mercurio pase a través de él solamente bajo presión, ya sea como producto de la expresión térmica cuando se coloca a una persona o de la fuerza centrífuga que se ejerce cuando éste se sacude al terminar de hacer la lectura.

- **Termómetro climático**

Son termómetros de alcohol y se usan para medir la temperatura de las habitaciones; algunas veces éste se tiñe para hacerlo más vistoso. Estos también se emplean para medir temperaturas inferiores a la de la solidificación del mercurio, ya que se pueden realizar lecturas hasta de 80 °C.

- **Termómetro industrial**

En el área industrial se utilizan tanto termómetros de gas como de metal.

El termómetro de gas se basa en la disminución de la presión de éste cuando disminuye la temperatura y es altamente preciso, pero requiere de muchos cuidados y su uso es complejo. Registra temperaturas que van de 200 °C hasta 1800 °C y se pueden hacer de nitrógeno, hidrógeno o helio.

El termómetro de metal, en general, se usa para medir altas temperaturas, mismas que pueden llegar hasta los 2000 °C y son elaborados de hierro, platino o iridio.

Muchas veces, por razones prácticas, en la fundición de metales se establece una temperatura aproximada con base en el calor que emite el cuerpo caliente.

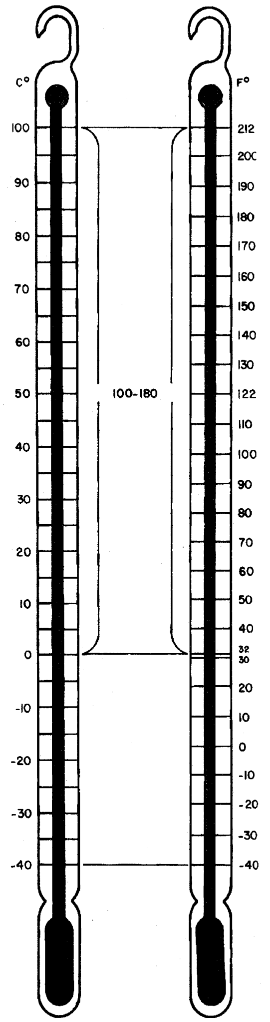
ESCALAS DE TEMPERATURA

Corresponde a la sesión de GA 3.28 ¿CUÁL ES LA MEJOR?

Desde que el hombre se percató que la temperatura de un cuerpo se podía medir, se dio al quehacer de la invención y fabricación de diversos instrumentos que le permitieran este fin. Sin embargo, tropezó con el problema de cómo formar una escala. Uno de los primeros intentos por encontrar una fue poner dos muescas a un tubo, cerrado herméticamente, que contenía algún gas o alcohol; entre éstas se marcaron dichas muescas a distancias iguales teniendo, así, una escala arbitraria. Algunos formaban sus termómetros con escalas de siete divisiones, algunos otros con ocho o doce de ellas. Galileo propuso una escala de ¡360 divisiones!

En la actualidad se utilizan termómetros con escalas bien definidas; dentro de éstas se encuentran la Fahrenheit, la Celsius, la Rankine y la Kelvin (que se verá con detenimiento en la siguiente sesión). La temperatura de las tres primeras se representa con la letra minúscula (t).

La escala Fahrenheit fue establecida por Gabriel Daniel Fahrenheit, quien tomó como referencia el punto más frío que se obtiene al mezclar agua con sal y la temperatura de una persona sana. Esta escala se modificó y tomó como parámetros la temperatura a la que se congela el agua (32 °F) y el punto de ebullición de la misma (212 °F), a la presión de una atmósfera.



La escala centígrada es más conocida como escala Celsius en honor a Anders Celsius, quien propuso que entre el punto de congelación y el punto de ebullición del agua a presión de 1 atmósfera, se dieran 100 divisiones.

La escala Celsius se acepta mundialmente para su aplicación en trabajos de laboratorio y se utiliza de manera práctica en casi todos los países del mundo a excepción de Estados Unidos e Inglaterra, donde se utiliza la escala Fahrenheit.

Como Estados Unidos es un país a la vanguardia en la investigación científica y la escala que maneja es la Fahrenheit, es necesario aprender a transformar los grados fahrenheit a grados celsius.

Para poder realizar esta conversión de grados, se deben tomar parámetros que nos den la relación entre ambas escalas; así se determina que al introducir 2 termómetros en hielo, uno con escala Fahrenheit y otro con escala Celsius, éstos nos dan una lectura de 32 °F y 0 °C, respectivamente. La relación que se encuentra es que a 32 °F corresponden 0 °C. Si ahora se meten los termómetros en agua hirviendo, éstos dan una lectura de 212 °F y 100 °C; con esta determinación se obtiene otra relación: a 212 °F corresponden 100 °C.

El intervalo que se observa en las lecturas obtenidas de cada termómetro es de 180 °F y 100 °C, dando una relación de 9:5; esto es, que cada 9 divisiones en grados fahrenheit es igual a 5 divisiones en grados celsius.

Relacionando las lecturas de las dos escalas se obtiene la siguiente fórmula:

$$\frac{°C}{5} = \frac{°F - 32}{9}$$

Las fórmulas de conversión de una temperatura a otra también se pueden representar como:

$$°C = \frac{5}{9}(°F - 32) \quad y \qquad °F = \frac{9}{5}(°C + 32)$$

Problema: la lectura termométrica de un líquido fue de 104 °F; si al mismo líquido se le hubiera medido la temperatura con un termómetro de escala en °C, ¿cuál sería la lectura?

El problema se puede resolver con solo transformar los 104 °F a grados celsius. Para hacer esto, basta aplicar la fórmula:

$$\frac{°C}{5} = \frac{°F - 32}{9}$$

De esta fórmula se despeja °C y en °F se sustituye el valor de 104 °F

$$°C = \frac{5(104 - 32)}{9}$$

$$°C = \frac{5(72)}{9}$$

$$°C = \frac{360}{9}$$

$$°C = 40$$

Si al líquido se le hubiera medido la temperatura con un termómetro de escala en °C, la lectura sería de 40 °C.

Problema: Un termómetro con escala Celsius marca 20 °C (la temperatura de un baño María). Si en lugar de usar este termómetro usáramos uno con escala en grados fahrenheit, ¿qué lectura marcaría?

En este problema se pide transformar los °C a °F, lo cual se puede hacer aplicando la fórmula que aparece en la siguiente página:

$$\frac{°C}{5} = \frac{°F - 32}{9}$$

De aquí se despeja °F y en °C sustituimos el valor de la lectura dada:

$$°F = \frac{9(°C)}{5} + 32$$

$$°F = \frac{9(20)}{5} + 32$$

$$°F = \frac{180}{5} + 32$$

$$°F = 36 + 32$$

$$°F = 68$$

Problema: La temperatura media del cuerpo humano es de 37 °C. En la escala Fahrenheit, ¿cuál sería esta temperatura?

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$°F = \frac{9(37)}{5} + 32$$

$$°F = \frac{333}{5} + 32$$

$$°F = 66.6 + 32$$

$$°F = 98.6$$

La temperatura media del cuerpo humano es de 98.6 °F.

En los países donde se emplea la Fahrenheit, también se emplea otra escala, la Rankine, misma que se deriva de la primera. En la Rankine el punto de congelación del agua es a 492 °R y el punto de ebullición es de 672 °R. Entre estas dos lecturas, al igual que en la Fahrenheit, hay 180 divisiones, por lo que se puede obtener la relación:

$$°F - 32 = °R - 492$$

Con esta ecuación podemos transformar °F a °R y °R a °F.

Problema: La temperatura de ebullición del agua es de 212 °F; esta temperatura, ¿a cuántos grados Rankine equivale?

$$°F - 32 = °R - 492$$

De la ecuación hay que despejar °R y sustituir el valor de °F

$$°F - 32 + 492 = °R$$

$$212 - 32 + 492 = °R$$

$$180 + 492 = °R$$

$$672 = °R$$

La temperatura de ebullición del agua en la escala Rankine será de 672 °R.

Problema: Un termómetro con escala Rankine marca que la temperatura de un gas es de 589 °R. Esta lectura, ¿a cuántos °C equivale?

Para resolver este problema, primero se deben convertir los °R a °F; segundo, los °F obtenidos convertirlos a °C.

1. Se convierten los °R a °F con la fórmula:

$$°F - 32 = °R - 492$$

$$°F = °R - 492 + 32$$

$$°F = 589 - 492 + 32$$

$$°F = 97 + 32$$

$$°F = 129$$

TS/AA/CB/3/V.1/P-293-372.PM7.0 371 3/12/03, 4:14 PM

Los 129 °F que se obtuvieron se convierten a °C con la fórmula:

$$\frac{°C}{5} = \frac{°F - 32}{9}$$

$$°C = \frac{5(°F - 32)}{9}$$

$$°C = \frac{5(129 - 32)}{9}$$

$$°C = \frac{5(97)}{9}$$

$$°C = \frac{485}{9}$$

$$°C = 53.8$$

Así se obtiene que 589 °R equivalen a 53.8 °C.